

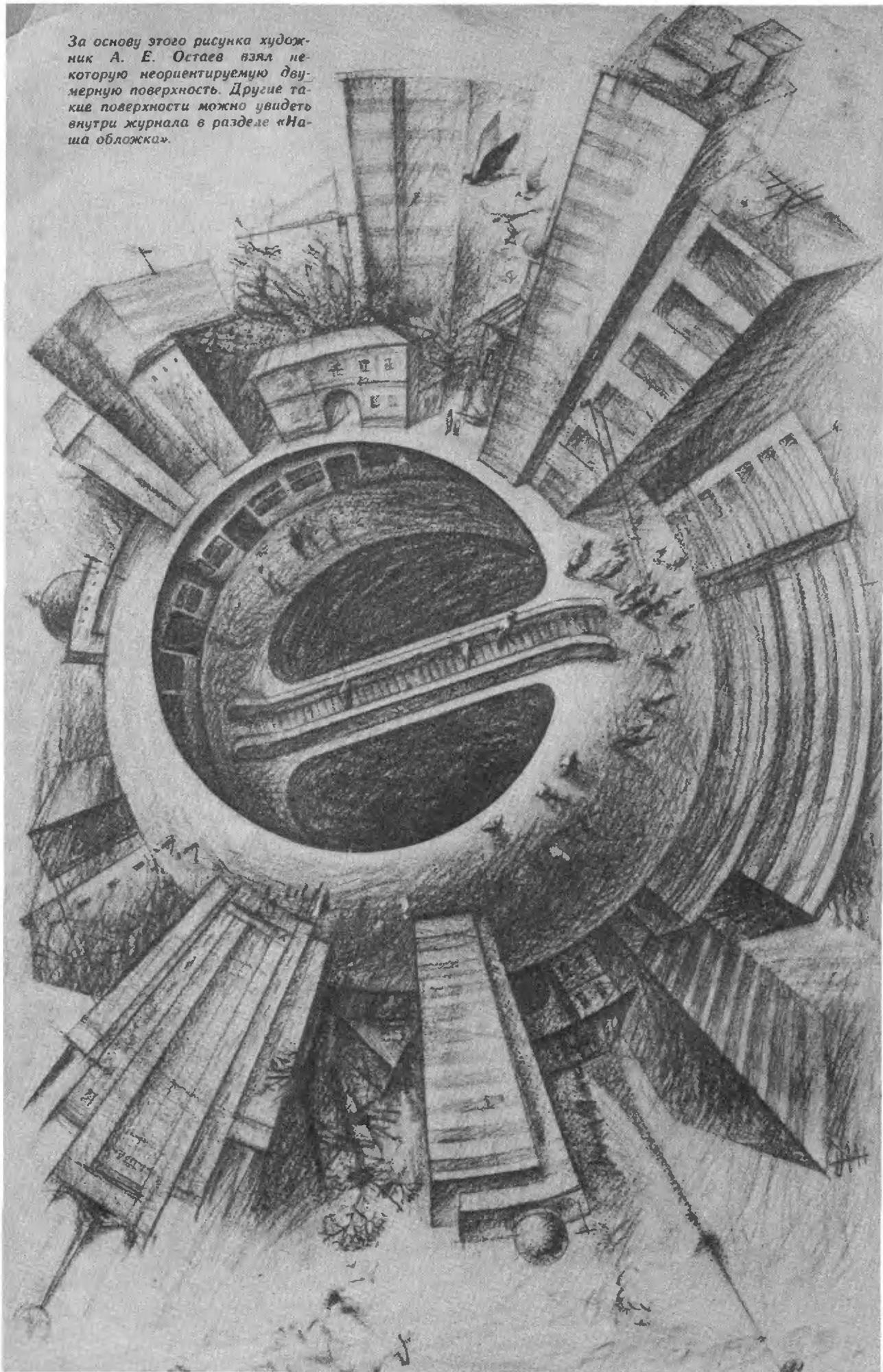
Квант

4
1984

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



За основу этого рисунка художник А. Е. Остаев взял некоторую неориентируемую двумерную поверхность. Другие такие поверхности можно увидеть внутри журнала в разделе «Наша обложка».





Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы



В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:

2	Исследования космоса продолжаютя	The study of outer space continues
4	А. А. Рuzмайкин. О природе космического магнетизма	A. A. Ruzmaikin. On the nature of cosmic magnetism
11	В. В. Рождественский Умeste ли вы считать?	V. V. Rozhdestvenski. Do you know how to count?
<hr/>		
	Новости науки	Science news
16	А. Я. Паршин. Волны кристаллизации	A. Ya. Parshin. Crystalization waves
17	Наука-83	Science-83
<hr/>		
	Математический кружок	Mathematics circle
18	М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. Центр тяжести облегчает решение	M. B. Baik, V. G. Boltjanski. Centre of mass helps solving
<hr/>		
	Школа в «Кванте»	Kvant's school
23	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
26	Б. С. Эппель. Дифференцирование сложной функции	B. S. Eppel. The chain rule
28	Избранные школьные задачи	Selected school problems
<hr/>		
	«Квант» для младших школьников	Kvant for younger school-children
29	Задачи	Problems
30	Б. А. Розенфельд. Откуда произошли названия геометрических фигур?	B. A. Rozenfeld. Where did the names of geometric figures come from?
<hr/>		
	Задачник «Кванта»	Kvant's problems
32	Задачи М856 — М860, Ф868 — Ф872	Problems M856 — M860; P868 — P872
35	Решения задач М841 — М845; Ф852 — Ф857	Solutions M841 — M845; P852 — P857
<hr/>		
	Игры, головоломки	Games and puzzles
42	А. В. Бялко Цепочки с бегущим кольцом	A. V. Byalko. A chain with a running link
<hr/>		
	Практикум абитуриента	College applicant's section
46	С. М. Козел, А. А. Шеронов. Теплоемкость идеального газа	S. M. Kozel, A. A. Sheronov. Heat capacity of ideal gazes
<hr/>		
	Информация	Information
52	Заочная физическая школа при МГУ	Moscow university physics correspondence school
<hr/>		
53	Варианты вступительных экзаменов	College entrance examination problems
<hr/>		
57	Ответы, указания, решения	Answers, hints, solutions
	Наша обложка (41)	Our cover page (41)
	Смесь (44, 45, 49, 50, 51)	Miscellaneous (44, 45, 49, 50, 51)
	Шахматная страничка	The chess page
	Четвертый чемпионат мира среди ЭВМ (3-я с. обложки)	Fourth world computer chess championship (3rd cover page)

Снимок, который воспроизведен на первой странице обложки, сделан космонавтами А. С. Иванченковым и В. В. Коваленком. Такой они увидели Землю через широкоугольный визир ориентации орбитальной станции «Салют 6»

12 апреля — День космонавтики

Исследования космоса продолжаются

Каждый год приносит советской науке новые успехи в исследовании космоса. Немало было сделано в этой области и в прошлом году.

150 суток работали на борту орбитальной станции «Салют-7» космонавты Владимир Ляхов и Александр Александров. Они, в частности, выполнили обширную программу исследований природных ресурсов Земли, по которой совместно с космонавтами работали экспедиции на специальных судах, самолетах, наземных станциях. Например, в сентябре 1983 года был проведен комплексный эксперимент «Интеркосмос — Черное море», в ходе которого одновременно осуществлялось «многоэтажное» наблюдение за состоянием моря и атмосферы над ним на различных глубинах и высотах.

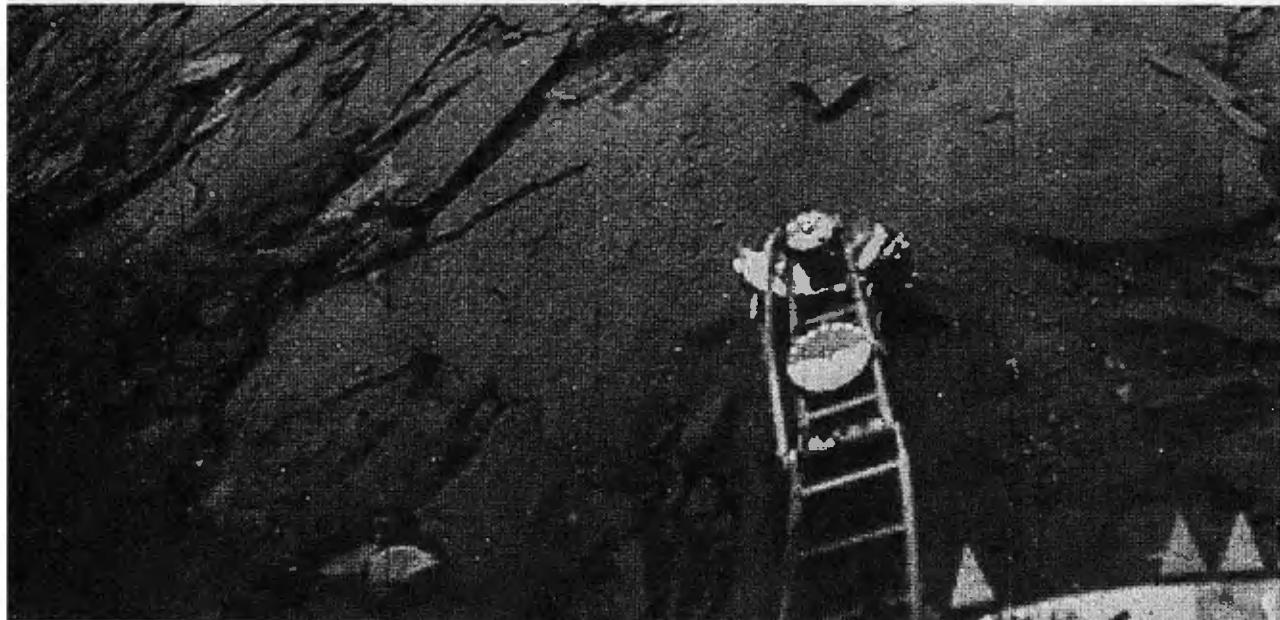
Выдающимся достижением является установка на станции «Салют-7» дополнительных солнечных батарей, которые значительно улучшили снабжение станции энергией. Это большой шаг на пути к будущим монтажным работам по сборке сложных технических сооружений в космосе. На приведенном сверху снимке вы видите космонавта А. Александрова во время повторного выхода в открытый космос.



Изучение разнообразных технологических процессов в условиях невесомости и глубокого вакуума, выполненное на станциях «Салют-6» и «Салют-7» при длительных космических полетах, позволяет приступить к производству ценных полупроводниковых материалов, кристаллов с необычными свойствами, новых лекарственных веществ.

Успешно продолжались исследования планеты Венеры. В прошлые годы были получены очень ценные для планетологии сведения о составе и строении венерианской атмосферы, а затем и о поверхности этой планеты в экваториальном поясе (на фотографии внизу воспроизведена панорама участка поверхности Венеры, полученная со спускаемого аппарата станции «Венера-14»). Оказалось, что поверхность планеты нагрета до 460 °С. Атмосфера Венеры в основном состоит из углекислого газа и азота и оказывает на поверхность планеты давление, равное 90 атм.

В 1983 году на орбиты спутников Венеры вышли две советские косми-



ческие станции «Венера-15» и «Венера-16». Они намного сложнее своих предшественниц. Обе станции имеют радиолокационные установки бокового обзора, позволяющие изучать рельеф поверхности планеты в ранее недоступных полярных областях. Таким образом, в недалеком будущем наша наука будет располагать детальной картой поверхности Венеры во всех ее районах. Из того, что мы уже знаем об этой планете, следует, что у нее есть массивные горные цепи, а высота гор достигает иногда 13 километров, что намного выше Эвереста.

Станции «Венера-15» и «Венера-16» оснащены также аппаратурой, позволяющей регистрировать тепловое излучение различных слоев венерианской атмосферы, расположенных выше облачного слоя, на высотах от 65 до 95 километров над поверхностью планеты. Именно на этих высотах возникает так называемый «парниковый эффект» — поглощение атмосферой значительной части тепла, уходящего с поверхности Венеры в космическое пространство. Он-то и приводит к дополнительному нагреванию планеты. Существует предположение, что аналогичный эффект может возникнуть и в атмосфере Земли под влиянием продуктов сжигания органического топлива. Это может привести к нежелательным изменениям нашего климата. Изучение этого явления представляет большой интерес для метеорологов и климатологов.

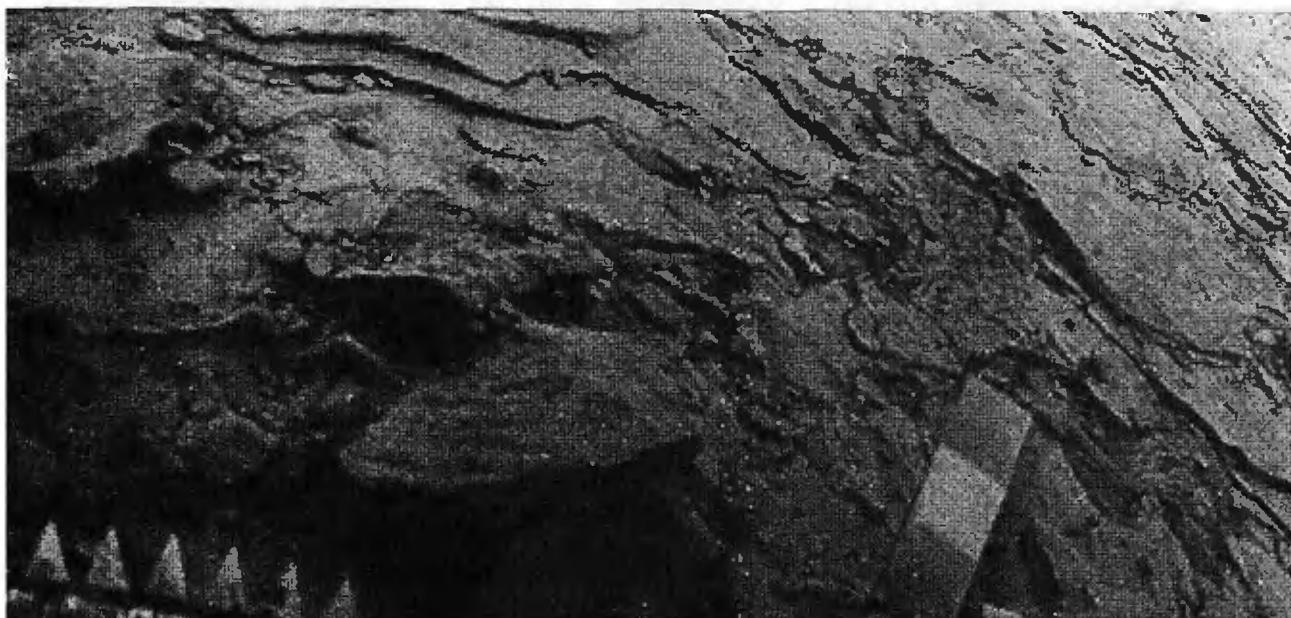
Эксперимент по исследованию температуры разных слоев атмосферы Венеры подготовлен советскими учеными совместно с учеными из ГДР.

В 1983 году были произведены запуски советских космических обсерваторий «Астрон» и «Прогноз-9», предназначенных для исследования далеких глубин Вселенной. «Астрон» оснащен самым крупным оптическим телескопом, вынесенным за пределы земной атмосферы. Телескоп детально исследует звезды различных типов, а также далекие галактики и квазары. Обнаружены звезды, в атмосфере которых в сотни раз больше урана, свинца и вольфрама, чем в атмосфере Солнца. Зарегистрировано несколько галактик с необычайно высоким уровнем ультрафиолетового излучения.

Успешно функционирует и установленный на «Астроне» рентгеновский телескоп. Он используется для исследования сверхновых звезд, а также вспыхивающих рентгеновских звезд — «барстеров»^{*)}. Этот телескоп позволил впервые зарегистрировать эффект «включения» источника рентгеновских лучей в созвездии Геркулеса.

Нынешняя администрация США неоднократно объявляла о своем стремлении перенести и без того чудовищно опасную гонку вооружений в космическое пространство, о подготовке будущих «звездных войн» против социалистических государств. Советский Союз ведет активную борьбу за запрещение размещения каких-либо видов оружия в околоземном космическом пространстве. Мы за мирный космос, изучаемый совместными усилиями ученых разных стран.

^{*)} См. «Квант», 1983, № 8.



О природе космического магнетизма

Доктор физико-математических наук
А. А. РУЗМАЙКИН

Магнитное поле Земли известно давно. Магнитные поля других планет, звезд и галактик открыты в нашем столетии, многие — совсем недавно. По современным представлениям поля в 10^2 — 10^4 раз превышающие земное магнитное поле, достигаются в пульсарах. Космические магнитные поля по своей природе не похожи на поля постоянных магнитов, сделанных из стали и сплавов. Они, подобно полям в электромагнитах, создаются токами, текущими в электропроводящей среде. Но космические электромагниты, как правило, не питаются от внешней ЭДС, а работают как самовозбуждающийся генератор. «Ротором» такого генератора служит движущаяся проводящая среда. Ниже сделана попытка кратко рассказать о таком космическом генераторе как источнике крупномасштабных космических магнитных полей.

Магнитные поля в природе

Хорошо известно, и это указано в учебнике физики, что магнитное поле создается электрическими токами. Исторически же люди познакомились с магнитным полем на примере постоянного магнита. Вспомните, как железные опилки эффектно очерчивают линии поля. Линии магнитного поля всегда замкнуты. Простое наблюдение показывает, что стрелка компаса ориентируется по касательной к линиям магнитного поля. В частности, так было обнаружено магнитное поле Земли.

С помощью современных космических аппаратов, снабженных более чувствительными, чем компас, приборами, удалось обнаружить магнитные поля и у некоторых других планет — Меркурия, Марса, Юпитера и Сатурна. Например, магнитное поле Марса было впервые зарегистрировано магнитометрами советской космической станции Марс-3. Магнитная индукция этого поля составляет $6 \cdot 10^{-8}$ Тл у экватора планеты. Самым сильным оказалось магнитное поле Юпитера ($4 \cdot 10^{-4}$ Тл у экватора, то есть примерно в 10 раз больше земного).

В начале нашего века было открыто магнитное поле Солнца.

Солнце — лишь рядовая звезда в звездном мире. Поэтому не удивительно, что магнитные поля обнаружались и у других звезд. При этом у некоторых из них поля оказались в десятки тысяч раз сильнее солнечного.

Магнитное поле существует также в межзвездной среде. Это вовсе не поле, созданное самими звездами. Поле звезды убывает при удалении от нее столь быстро (обычно обратно пропорционально кубу расстояния), что не «дотягивается» даже до соседней звезды. А в Галактике (гигантский звездно-газовой системе, видимой ночью в виде полосы Млечного пути) магнитное поле имеет огромную протяженность, значительно превышающую расстояние между звездами. Магнитная индукция этого поля мала — около 10^{-10} Тл.

С открытием космического магнетизма встал вопрос о причинах его происхождения. В космосе очень мало твердых тел, физические процессы протекают в жидкой или газообразной среде, состоящей из электронов, положительно заряженных ионов, а также нейтральных атомов и молекул. Земное магнитное поле (рисунк 1, а) создается движе-

нием вещества (расплавленное железо с примесью углерода, серы, кремния) в жидкой оболочке ядра Земли (это сферический слой, заключенный между 0,19 и 0,55 радиуса Земли). В газобразных звездах (таких, как наше Солнце) магнитное поле генерируется во внешней частично ионизованной оболочке толщиной около 1/10 радиуса звезды.

Итак, космические магнитные поля создаются токами, протекающими в электропроводящей среде. Похожим образом создаются поля в катушке электромагнита (рисунок 1, б). Но для поддержания тока в электромагните нужен внешний источник энергии. Между тем в космических условиях «батарейные» ЭДС, действующие за счет химических или тепловых эффектов, обычно слабы или вообще отсутствуют. Основным источником магнитных полей в космических условиях служит движение самой проводящей среды.

Космические магнитные поля отличаются непостоянством. Например, крупномасштабное поле Солнца почти периодически изменяет свою полярность через каждые 11 лет. С этими изменениями связана цикличность солнечной активности, которая проявляется в виде темных пятен, солнечной короны, вспышек и других явлений. В последние годы циклы активности обнаружены у многих звезд. Близкое нам магнитное поле Земли также оказалось непостоянным. Через большие промежутки времени — примерно в двести тысяч лет — оно меняет свое направление на 180°: северный магнитный полюс становится южным и наоборот.

Почему изменяется магнитное поле в проводящей среде

Электрическое поле, создаваемое зарядом, исчезает, если этот заряд нейтрализовать зарядом противоположного знака. В плазме, состоящей из равного количества движущихся положительных и отрицательных зарядов, любой избыток заряда одного знака, случайно появившийся в какой-нибудь области, быстро нейтрализуется. Ясно, что время нейтрализации электрического поля тем короче, чем больше электропроводность плазмы. Магнитное поле в плазме создается движущимися зарядами, то есть электрическими токами. Очевидно, с изменением тока будет меняться поле.

Обсудим вначале, как изменяются токи не в плазме, а в обычных металлических проводах, которые имеются в каждой комнате.

Рассмотрим виток радиуса r провода поперечного сечения πl^2 с удельным сопротивлением ρ (Ом · м). Пусть сначала виток подключен к батарее и в нем течет ток I (А), который создает в пространстве вокруг витка магнитное поле B (Тл). Максимальное поле достигается в центре витка. Оно перпендикулярно его плоскости и равно по величине $B_{\max} = I/2r$. Магнитную энергию этой системы можно оценить как

$$W \approx \mu_0 \frac{B_{\max}^2}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (\text{Дж}) \quad (\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}).$$

Отключим источник то-

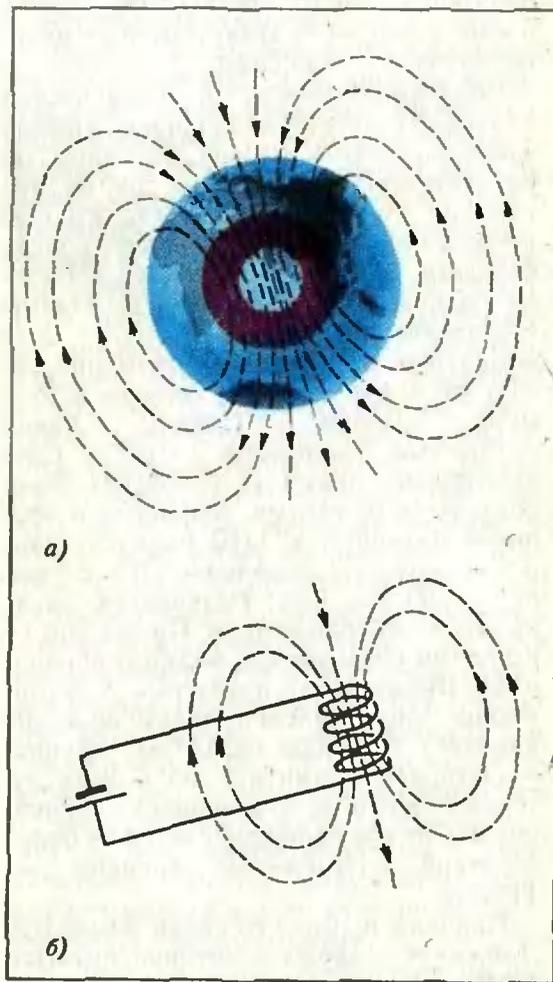


Рис. 1. Магнитное поле Земли (а) внешне сходно с полем постоянного магнита. Однако природа этих полей различна. Магнетизм магнита объясняется сложными квантовыми свойствами частиц, входящих в состав твёрдого тела. Магнитное поле Земли создается электрическими токами, текущими в жидком ядре. В этом плане земное поле подобно полю электромагнита (б).

ка, сохранив цепь замкнутой. На первый взгляд, ток немедленно прекратится вследствие сопротивления проводника R . Однако в действительности ток исчезнет не мгновенно. Темп его затухания определит быстрота джоулевых потерь $N = I^2 R$ (Дж/с). Ток поддерживает запасенная вокруг витка магнитная энергия. (Отметим, что магнитная энергия намного больше кинетической энергии носителей тока — электронов.) Эта энергия исчерпывается за время

$$\tau \approx \frac{W(\text{Дж})}{N(\text{Дж/с})} \sim 10^{-6} \sigma l^2 (\text{с}),$$

где $\sigma = 1/\rho$ — проводимость материала витка.

Оценим величину времени затухания поля τ для медного провода с радиусом поперечного сечения $l = 1$ см. Проводимость меди составляет около $6 \cdot 10^7$ (Ом \cdot м) $^{-1}$. Получим, что τ меньше сотой доли секунды.

Обратимся теперь к космической плазме. Ее электропроводность обычно такая же, как у плохих металлов, но размеры областей, занятых токами, гигантские. В этом случае характерное время изменения поля становится очень большим. Например, в верхней оболочке Солнца электропроводность плазмы составляет около 10^6 (Ом \cdot м) $^{-1}$. (при комнатных температурах примерно такую же σ имеют ртуть, нихром и висмут). Радиус Солнца равен ~ 700 тыс. км, то есть $7 \cdot 10^8$ м. Следовательно, время исчезновения поля, создаваемого токами, текущими в оболочке размером в $1/10$ радиуса, равно по порядку величины 10^{15} с, или около 100 млн. лет! Разумеется, оценка весьма приближенная. Но сравните с долями секунды для медного проводника. Выходит, что привычное электрическое сопротивление практически не изменяет однажды созданные крупномасштабные магнитные поля. Как же тогда объяснить, что, скажем, солнечное магнитное поле изменяется за более короткий промежуток времени — 11 лет?

Причина в том, что среда движется. Движение среды, в которой имеются свободные положительные и отрицательные заряды, эквивалентно движению проводника. В учебнике «Физика 9» показано, что движение проводника в магнитном поле сопровождается появлением электродвижущей силы, и, если концы такого проводника замкнуть, в цепи возникнет ток. Этот вторичный

ток сам создает магнитное поле, которое, складываясь с первоначальным полем, изменяет его. Замечательно, что в результате такого изменения в идеально проводящей плазме, сопротивление которой равно нулю, суммарный магнитный поток $\Phi = BS$ (S — площадь контура) должен оставаться неизменным. Это значит, что магнитное поле, создаваемое движущимся проводником, как бы перемещается вместе с ним. Такое поле принято называть замороженным в плазму магнитным полем. Наглядно можно себе представить магнитное поле в движущейся проводящей среде, глядя на поведение легкой нити, брошенной в поток: нить не только переносится, но и растягивается, если частицы, движущиеся в потоке, удаляются друг от друга.

При вмороженности движение плазмы как единого целого переносит магнитные линии. Движения же одних частей плазмы относительно других деформируют магнитные линии: растягивают и изгибают их. Магнитная линия, которая первоначально проходила через две близкие частицы плазмы, будет и в дальнейшем проходить через эти же частицы, то есть следовать за их перемещениями (рисунок 2). Количество магнитных линий, пронизывающих любую площадку, охватываемую замкнутым контуром из движущихся жидких частиц, остается неизменным (при $\rho = 0$). Магнитная индукция B поля может возрастать при деформациях, когда сближаются участки с одинаковым направлением поля, и ослабляться при сближении участков с противоположным направлением поля. Это видно из

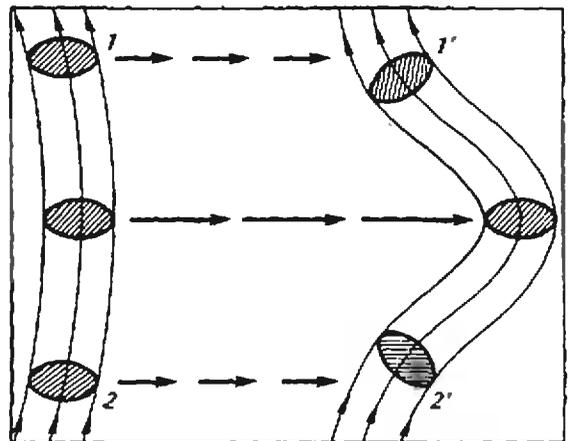


Рис. 2 Изменение магнитного поля при перемещении частиц идеально проводящей плазмы из положения 1 — 2 в положение 1' — 2'.

равенства $B = \Phi/S$: если Φ сохраняется неизменным, то B меняется обратно пропорционально S .

Самый простой способ усилить замороженное магнитное поле состоит в сжатии слоя плазмы (то есть в уменьшении значения S). Эта идея используется для простейшего объяснения гигантских магнитных полей пульсаров. Пульсар представляет собой компактную нейтронную звезду с радиусом r порядка 10 км. Если предположить, что нейтронная звезда получилась путем сжатия обычной звезды с радиусом r_0 около 1 млн км, то, значит, в процессе сжатия ее радиус уменьшился в 10^5 раз. Сохранение магнитного потока означает, что

$$\pi r_0^2 B_0 = \pi r^2 B,$$

где B_0 — поле исходной звезды, B — поле пульсара. Следовательно, при сжатии поле усиливается в $(r_0/r)^2 = 10^{10}$ раз. Поэтому скромное магнитное поле обычной звезды с магнитной индукцией, скажем, 0,01 Тл превращается в поле с магнитной индукцией 10^8 Тл.

С другой стороны, движения плазмы приводят к искривлению и запутыванию магнитных линий. А для мелко-масштабных полей, как мы видели, становятся существенными джоулевы потери.

Оказывается, могут существовать такие движения плазмы, что эффект усиления крупномасштабного поля преобладает или по крайней мере не уступает ослаблению. В этом случае движущаяся плазма работает как генератор.

Такую машину естественно назвать «динамо» (генератор в свое время называли динамо-машиной). Действие динамо-машины обычно демонстрируют на примере рамки с током, вращающейся в поле магнита.

Гидромагнитное динамо

Динамо в проводящей среде, о котором мы ведем речь, должно, в отличие от технического генератора, работать без проводов, обмоток, а главное — без внешнего магнитного поля, которое в обычном генераторе обязательно*). Поскольку источником энергии в этом динамо служат только гидро-

динамические движения плазмы, его называли «гидромагнитным». Для запуска гидромагнитного динамо нужно только слабое начальное магнитное поле. Обычно слабые поля существуют благодаря различным эффектам взаимодействия между собой заряженных частиц плазмы.

Идея объяснения магнитных полей Земли и Солнца с помощью гидромагнитных движений была выдвинута известным английским физиком Дж. Лармором в 1919 году. Но возможно ли самовозбуждающееся гидромагнитное динамо, «работающее» без внешних источников ЭДС? Положительный ответ на этот вопрос лучше всего иллюстрирует наглядный пример, впервые продемонстрированный в 1971 году академиком Я. Б. Зельдовичем участникам симпозиума в Кракове.

Возьмем кольцевой жгут, состоящий из отдельных колечек-резиночек (рисунок 3, а). Пусть резиночки жгута имитируют магнитные линии, имеющие одинаковое направление (его удобно пометить стрелочками). Свернем жгут в восьмерку (рисунок 3, б), наложим одно кольцо восьмерки на другое и растянем удвоенный жгут до прежнего размера (рисунок 3, в). Обратите внимание на направления стрелок; они одинаковы. Таким образом, количество магнитных линий, проходящих через любое поперечное сечение жгута, удвоилось. Повторяя процедуру складывания и растяжения, можно всякий раз удваивать количество магнитных линий в жгуте, пока этому не помешает упругость резины. Заметьте, что стартовав из какой-нибудь точки первоначального жгута, можно было вернуться в ту же точку, обойдя один круг. После удвоения возвращение в ту же точку требует уже двух обходов по окружности. Тем самым удвоенный жгут не вполне эквивалентен исходному. Чтобы избавиться от этого, можно всякий раз разрезать жгут в точке сгиба восьмерки и сшивать освободившиеся окружности, складывая их затем в один удвоенный жгут, эквивалентный исходному.

В природных условиях операция удвоения может выполняться движениями среды, в которую «заморожено» слабое начальное магнитное поле. Нетрудно представить себе движения такого

*) В современных больших генераторах ток, создающий поле, берется от самого генератора — в этом смысле сходство большое. Однако расположение обмоток и конструкции таких генераторов придуманы

человеком. Может ли Природа, не используя изоляционных материалов, добиться того же эффекта — вот в чем вопрос!

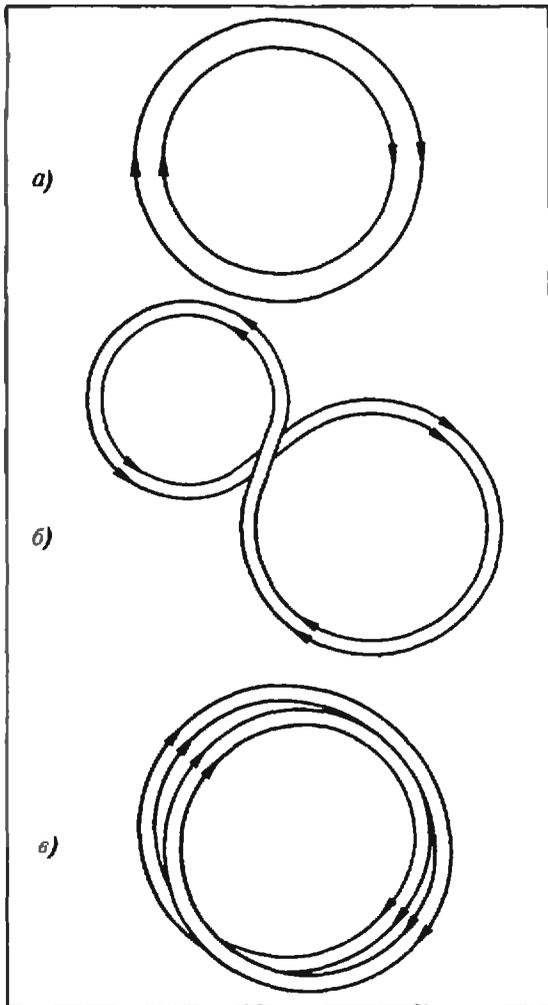


Рис. 3 Удвоение жгута магнитных линий

рода — скажем, последовательные повороты вокруг взаимно перпендикулярных осей и растяжения.

Процедуру устранения неэквивалентности удвоенного жгута исходному может проделывать электрическое сопротивление: джоулевы потери приводят к сглаживанию и отсоединению магнитных линий в местах наибольшего скручивания. Сопротивление мешает также жгуту сделаться сколь угодно малым в поперечнике после многих растяжений, которые имеют место в каждом акте удвоения. Сопротивление будет удерживать диаметр жгута почти постоянным.

Описанный пример генератора прост и нагляден. Но станет ли Природа работать таким образом? Ведь для этого движение проводящей среды должно быть организовано особым образом.

Посмотрим, какие движения совершает среда в космических условиях.

Неоднородное вращение

Простейшее движение, характерное для всех планет, звезд и галактик, — вращение. Однако, если все части тела вращаются с одинаковой угловой скоростью, то есть вращение однородно, то и магнитные линии будут вращаться с телом, оставаясь практически неизменными. Для изгибов, растяжений и переворотов линий нужны относительные движения соседних частиц плазмы, то есть вращение должно быть неоднородным. Ясно, что твердые тела вращаются однородно, иначе они разрушаются. Жидкое или газообразное тело способно совершать и неоднородное вращение. Наблюдения за Солнцем показали, что экваториальные части нашей звезды совершают полный оборот на несколько суток быстрее, чем околополярные области. Косвенные данные указывают на то, что внутренние, непосредственно не наблюдаемые, области Солнца вращаются еще быстрее. Неоднородно вращается газовый диск Галактики: за одно и то же время его внутренние части делают больше оборотов, чем внешние.

Чтобы наглядно представить себе неоднородное вращение, вообразите, что перед вами несколько concentрических кругов каруселей (рисунк 4, а). Те, что ближе к центру, крутятся, скажем, быстрее каруселей, расположенных дальше от центра.

Посадим на карусели по несколько человек, так, чтобы все они расположились вдоль одного диаметра. Дадим им в руки резиновую веревку, закрепленную на концах диаметра и имитирующую магнитную линию, и включим вращение. Легко убедиться, что за несколько оборотов резиновая веревка (магнитная линия) скрутится в спираль (рисунк 4, б). Первоначально линия располагалась вдоль диаметра, теперь она стала близка к окружности. Таким образом, неоднородное вращение сделало из радиального магнитного поля поле, направленное почти вдоль азимута.

Можно в качестве исходной взять магнитную линию, которая «провисает» сверху вниз и изогнута в сторону вращения. В этом случае закручивание приведет к образованию двух колец с противоположно направленным полем. Одно из колец будет расположено выше каруселей, другое — ниже. Но, как и в предыдущем случае, встает

задача поддержания исходного радиального поля.

Не помогут ли другие движения? Нельзя ли организовать что-то похожее на восьмерку?

Спиральность

Для космической среды типично хаотическое, запутанное, как говорят, турбулентное движение. Такое движение мы видим, наблюдая, скажем, течение воды в горной речке или вблизи водоворота. Свойственно оно и окружающему нас воздуху. Именно благодаря хаотическим движениям воздуха в нем быстро распространяются, например, дым сигареты или запах духов.

В силу своей хаотичности, «неорганизованности» турбулентные движения электропроводящей среды (плазмы) обычно быстро запутывают и измельчают любое магнитное поле. Однако в космических условиях турбулентность обладает некоторым «организованным» свойством.

Представим себе вместо реального турбулентного течения совокупность отдельных вихрей-винтов, сочетающих поступательное движение с вращением вокруг своей оси. Пусть часть из них имеет правовинтовое вращение, а часть — левовинтовое.

Спиральное движение вихря способно поднять у магнитной линии петлю, похожую на греческую букву омега (рисунок 5), и затем повернуть ее. Однако вихри правовинтовой и левовинтовой

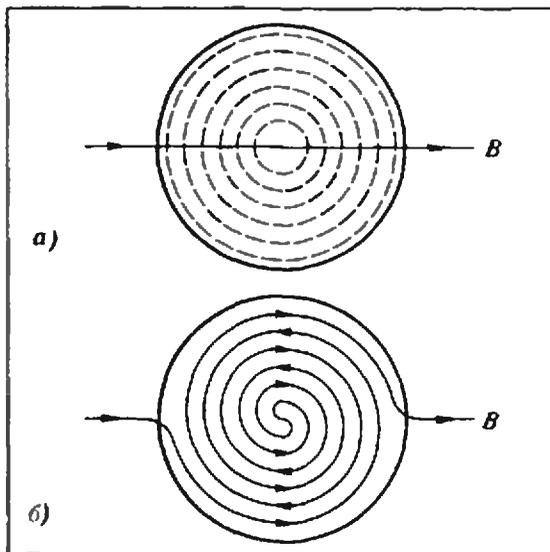


Рис. 4. За несколько оборотов неоднородно вращающегося тела горизонтальная магнитная линия превращается в спираль

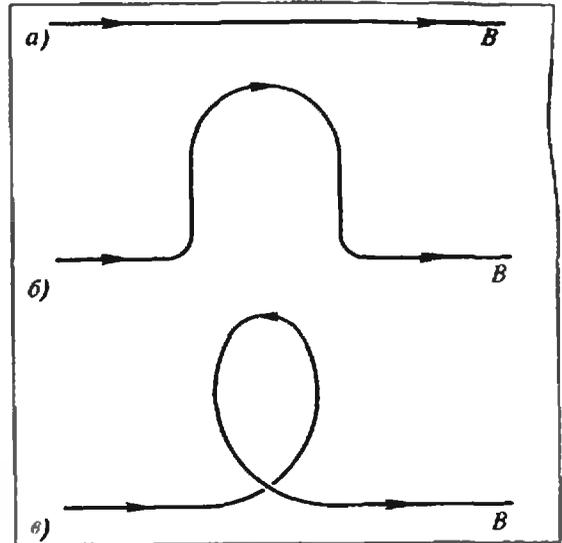


Рис. 5. Спиральное движение среды вытягивает магнитную линию (а) в петлю (б) и разворачивает эту петлю (в). Создается ток, параллельный полю.

закрутки дадут петли с противоположным направлением поля. Спрашивается: каков будет эффект воздействия большой совокупности вихрей с различной закруткой, то есть реального турбулентного течения?

В однородной ситуации число правовинтовых и левовинтовых вихрей одинаково. Такая совокупность винтов обладает свойством зеркальной симметрии. В самом деле, поставим в любом месте зеркало и посмотрим на отражение вихрей: в зеркале правовинтовые вихри переходят в левовинтовые и наоборот. Но поскольку число правовинтовых вихрей было равно числу левовинтовых, то картина в целом останется неизменной.

Теперь вспомним, что космические тела вращаются. Представим себе такую ситуацию. В слое жидкости плотность у дна больше, чем у поверхности: весь слой вращается вокруг некоторой оси, проходящей через него. В этом слое имеются вихри (и правовинтовые и левовинтовые). Как они будут себя вести?

Каждый вихрь вращается «сам по себе» и, кроме того, может подниматься или опускаться в слое. Любой поднимающийся вихрь будет расширяться подобно пузырю, попадающему в более разреженную среду. Возникающее таким образом боковое движение (рисунок 6) будет отклоняться от чисто радиального из-за общего вращения слоя (подобно тому, как отклоняется от радиального курса человек, идущий по

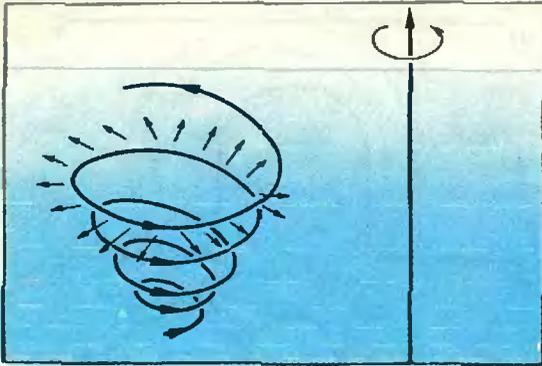


Рис. 6. Вращающийся слой плазмы с уменьшающейся вверх плотностью. Вращение слоя как целого сообщает дополнительную угловую скорость поднимающемуся и раздувающемуся вихрю.

вращающемуся кругу). А это значит, что вихрю сообщается еще одно дополнительное вращение, вызванное общим вращением слоя.

Очевидно, этот эффект воздействия общего вращения одинаков для всех поднимающихся вихрей — и правых, и левовинтовых. На опускающиеся вихри общее вращение действует в противоположную сторону, но знак винта будет тем же, что и у поднимающихся вихрей. В итоге, действие общего вращения на сово-

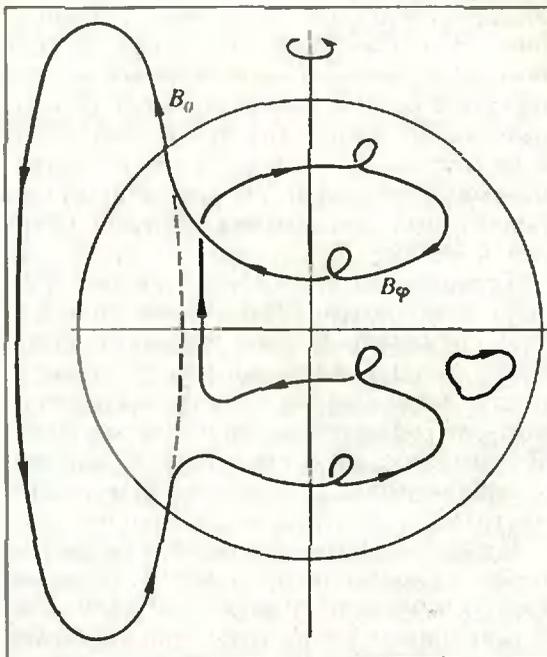


Рис. 7. Совместное действие на магнитное поле неоднородного вращения и спиральных движений. Вращение из исходного поля (B_0) накручивает азимутальное поле (B_ϕ). Спиральные движения поднимают петли этого поля, они открываются, поворачиваются, растягиваются и сливаются, давая новое поле, направленное параллельно или антипараллельно исходному полю B_0 .

купность вихрей в неоднородном слое приведет к тому, что станет больше винтов того знака, который диктуется общим вращением. Но ситуация с преобладанием, скажем, левовинтовых вихрей над правовинтовыми, как легко проверить, уже не будет обладать свойством зеркальной симметрии.

Такую турбулентность называют спиральной. Несмотря на ее хаотичность, здесь в среднем имеется некоторая дополнительная закрутка. Спиральность и есть то организованное свойство, которым отличается турбулентность во вращающихся неоднородных по плотности космических телах (в ядрах планет, в звездах и галактиках).

Обычно спиральная турбулентность в космических телах действует совместно с неоднородным вращением. Как мы видели (рисунок 4), неоднородное вращение превращает поле, направленное по диаметру, в поле, направленное почти по азимуту, точнее — по спирали. Спиральная турбулентность поднимает у азимутального поля много петель и поворачивает их в различные стороны (рисунок 7). Но поскольку винты одного знака преобладают, то после сложения петель останется некоторое общее радиальное поле определенного направления. Если новое радиальное поле совпадает по направлению с первоначальным, то происходит усиление поля. Когда направление получающегося поля противоположно исходному, то возможно «обращение» поля. Это позволяет объяснить явление повторяющихся обращений направления поля, которые наблюдаются на Солнце и других звездах. Заметим, что в случае с восьмеркой мы получили динамо с непрерывным усилением магнитного поля без обращений.

Не следует упускать из виду, что гидромагнитное динамо работает в условиях сильного турбулентного запутывания и уничтожения магнитных линий. Таким образом, рост или поддержание поля происходят на фоне непрерывного рождения новых и отмирания старых магнитных полей.

Гидромагнитное динамо широко используется для описания магнитных полей звезд, планет и галактик. В частности, гидромагнитное динамо является, по-видимому, основным «двигателем» повторяющейся солнечной активности.



Умеете ли вы считать?

В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ

Последние десятилетия характеризуются бурным развитием и распространением вычислительной техники. Электронные вычислительные машины, настольные, карманные и прочие счетные устройства позволяют значительно сократить время всевозможных расчетов. И порой от школьников можно услышать, что «уметь считать» сейчас вообще не нужно. Но как это ни парадоксально, наиболее эффективную помощь техника оказывает именно тому, кто умеет грамотно вычислять.

Мы попробуем показать читателю трудности, возникающие при практиче-

ских расчетах, а также дать некоторые советы, как с ними справляться.

Озадачивающие примеры

Пример 1. При вычислении на настольной вычислительной машинке выражения $x = 1/3 \cdot 3/5 \cdot 5/7 \cdot 7/8 \cdot 8$ с точностью до двух цифр после запятой вместо ожидаемой единицы получается $x = 0,88$. Если же вычислять $1/8 \cdot 8/7 \times 7/5 \cdot 5/3 \cdot 3$, то получится 0,90.

Пример 2. При сложении на ЭВМ чисел $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/250\,000$ с пятью знаками после запятой слева направо получается 12,88777, а справа налево получается 12,95821; мы видим, что разница в ответах больше, чем каждое из большинства слагаемых.

Пример 3. Приближенное значение $\sqrt{290}$ равно 17,029 (ошибка меньше 0,0004). При вычислении дроби $1/(\sqrt{290} - 17)$ с тремя цифрами после запятой получается 34,483. Однако если дробь преобразовать к виду $\sqrt{290} + 17$, то результат сложения будет 34,029, с ошибкой меньшей 0,0004. Стало быть, ответ 34,483 гораздо грубее.

Пример 4. Решением системы

$$\begin{cases} x + 5y = 17, \\ 1,5x + 7,501y = 25,503 \end{cases}$$

является пара чисел (2; 3). Если изменить число 25,503 всего на 0,003 —

$$\begin{cases} x + 5y = 17, \\ 1,5x + 7,501y = 25,5, \end{cases}$$

то решением будет пара (17; 0). Если же в исходной системе число 7,501 заменить на 7,499 —

$$\begin{cases} x + 5y = 17, \\ 1,5x + 7,499y = 25,503, \end{cases}$$

то решением будет (32; -3).

Подобные примеры могут смутить начинающего вычислителя. Чтобы правильно ориентироваться в похожих ситуациях, нужно знать:

1) какие бывают ошибки и откуда они берутся,

2) как количественно характеризовать ошибку,

3) как грамотно организовать вычисления.

Классификация ошибок

Ошибки можно разделить на три типа*).

1) Ошибки, содержащиеся в исходной информации. Исходными данными во всякой задаче обычно служат либо часто встречающиеся константы, либо величины, полученные в результате измерений. Но любой измерительный прибор обладает какой-то определенной разрешающей способностью. Например, на торговых весах невозможно уловить разницу в 1 г, так что, уплатив за 100 г масла, вряд ли стоит верить, что вы получите ровно 100 г, а не 101 г или 99 г. Ошибки измерений могут возникнуть также из-за неверного снятия показания прибора либо в результате грубого просмотра.

Исключая два последних источника ошибок, вызванных субъективными причинами, остается, тем не менее, принять тот факт, что ошибки в исходных данных неизбежны и обусловлены точностью измерительного прибора. Никакие манипуляции с исходными данными не позволяют гарантировать, что результат обладает большей точностью, чем данные. Утверждения вроде следующего: «площадь нарисованного на бумаге

круга, радиус которого измерялся линейкой, равна 3206,9569 мм²», — по меньшей мере наивны.

2) Ошибки округления. Эти ошибки тесно связаны со спецификой приближенного счета. Дело в том, что никакое вычислительное «средство», будь то ЭВМ или человек, не может производить арифметические операции с бесконечными последовательностями. Таким образом, все данные и промежуточные результаты должны быть записаны при помощи ограниченного набора цифр и, следовательно, как правило, неточны.

3) Ошибки ограничения. Очень многие вычисления описываются как бесконечная или астрономически большая последовательность уточнений результата. Естественно, приходится обрывать такой процесс в какой-то момент и довольствоваться последним полученным приближением. Примером может служить процесс вычисления \sqrt{a} методом последовательных приближений:

$$x_1 = (a + 1) / 2, \dots, x_{n+1} = (a / x_n + x_n) / 2, \dots$$

Итак, мы видим, что ошибки неизбежны. Значит, необходимо уметь их количественно оценивать, чтобы получать результаты с необходимой точностью.

Распространение ошибок

Поскольку каждый вычислительный процесс в конечном счете сводится к выполнению четырех арифметических действий, посмотрим, что происходит с ошибками при выполнении этих действий.

Для простоты будем считать все рассматриваемые величины (которые могут быть исходными данными, промежуточными или конечными результатами вычислений) положительными. Их точные значения будем обозначать x, y, \dots , соответствующие приближенные — $\underline{x}, \underline{y}, \dots$

Характеристиками точности приближения служат *абсолютная ошибка* (или погрешность) $\Delta_x = x - \underline{x}$ и *относительная ошибка* $\omega_x = \Delta_x / x$. В таблице 1 собраны формулы, выражающие зависимость абсолютной и относительной ошибок результатов арифметических действий от ошибок данных (проверьте эти формулы самостоятельно!).

При практических измерениях и расчетах точные значения абсолютной и

*1) О различных источниках ошибок, возникающих при обработке экспериментальных данных, и о том, что получается, если ими пренебрегать, рассказывалось также в статье А. Н. Зайделя «Обман или заблуждение?» («Квант», 1983, № 5, с. 24)

Таблица 1

Абсолютная ошибка	Относительная ошибка
$\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y$	$\omega_{x+y} = \frac{x}{x+y} \omega_x + \frac{y}{x+y} \omega_y$
$\Delta_{x-y} = \Delta_x - \Delta_y$	$\omega_{x-y} = \frac{x}{x-y} \omega_x - \frac{y}{x-y} \omega_y$
$\Delta_{x \cdot y} = x \Delta_y + y \Delta_x + \Delta_x \Delta_y$	$\omega_{x \cdot y} = \omega_x + \omega_y + \omega_x \omega_y$
$\Delta_{x/y} = \left(\frac{\Delta x}{y} - \frac{x}{y} \frac{\Delta y}{y} \right) : \left(1 + \frac{\Delta y}{y} \right)$	$\omega_{x/y} = (\omega_x - \omega_y) \frac{1}{1 + \omega_y}$

относительной ошибок бывают неизвестны (потому что неизвестны точные значения рассматриваемых величин). Однако, зная точность измерительных приборов, правила, по которым производилось округление промежуточных результатов и т. п., обычно можно гарантировать, что абсолютная или относительная ошибки не превосходят по модулю некоторых величин — *границ* этих ошибок. Если заданы границы ошибок для величин x и y , то из формул таблицы 1 нетрудно получить границы ошибок для $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ и x/y (см. таблицу 2, в которой предполагается, что $|\Delta_x| < \Delta_1$, $|\Delta_y| < \Delta_2$, $|\omega_x| < \omega_1$, $|\omega_y| < \omega_2$).

Таблица 2

Граница абсолютной ошибки	Граница относительной ошибки
$ \Delta_{x+y} < \Delta_1 + \Delta_2$	$ \omega_{x+y} < \frac{x}{x+y} \omega_1 + \frac{y}{x+y} \omega_2$
$ \Delta_{x-y} < \Delta_1 + \Delta_2$	$ \omega_{x-y} < \frac{x}{ x-y } \omega_1 + \frac{y}{ x-y } \omega_2$
$ \Delta_{x \cdot y} < x \Delta_2 + y \Delta_1 + \Delta_1 \Delta_2$	$ \omega_{x \cdot y} < \omega_1 + \omega_2 + \omega_1 \omega_2$
$ \Delta_{x/y} < \frac{y \Delta_1 + x \Delta_2}{y^2} : \left 1 + \frac{\Delta y}{y} \right $	$ \omega_{x/y} < (\omega_1 + \omega_2) \times \left \frac{1}{1 + \omega_y} \right $

В этой таблице особняком стоит формула для абсолютной ошибки частного $\Delta_{x/y}$: в нее входит сама ошибка Δ_y , а не ее граница Δ_2 , поэтому $|\Delta_{x/y}|$ может оказаться большим при $\Delta_y < 0$, даже если Δ_1 и Δ_2 малы.

Анализ примеров

Попробуем сейчас понять, чем объясняются «странности», с которыми мы столкнулись в приведенных в начале статьи примерах.

Пример 1. По правилам обычной арифметики в произведении дробей $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{1}$ можно, не меняя результата, как угодно переставить числители, а также знаменатели. Из нашего примера видно, что в арифметике приближенных вычислений это уже неверно. Чтобы понять, как возникает расхождение в результатах, возьмем совсем простой пример — вычислим двумя способами выражение $(1.3)/3$ (с точностью до двух знаков после запятой). Имеем

$$1,0 \times 3,0 = 3,0, \quad 3,0 \times 3,0 = 1,0,$$

но, с другой стороны,

$$1,0/3,0 = 0,33, \quad 0,33 \times 3,0 = 0,99.$$

Если арифметических действий много, то разница в ответах может быть еще большей.

Пример 2 показывает, что результат приближенного сложения нескольких чисел может зависеть от порядка, в котором оно производится. Рассмотрим более наглядный пример. Пусть надо вычислить сумму

$$100 + \underbrace{0,1 + 0,1 + \dots + 0,1}_{2000 \text{ раз}}$$

округляя все результаты до трех значащих цифр. (Напомним, что *значащими* называются все цифры в записи числа, начиная с первой слева ненулевой; скажем, в числах 0,017 и 1,7 — по две значащие цифры, в числе 170 — три.) Если вести сложение слева направо, то сначала получим $100 + 0,1 = 100,1$ и после округления опять 100; этот результат, очевидно, не изменится и в дальнейшем. При сложении справа налево получим последовательно: $0,1 + 0,1 = 0,2$, $0,2 + 0,1 = 0,3$, ... $99,9 + 0,1 = 100$. Следующая тысяча слагаемых результата не изменит, а при последнем сложении получим $100 + 100 = 200$. Это уже лучше, но все еще далеко от точного ответа 300, получить который можно сложив тысячу чисел 0,1, потом еще тысячу 0,1 и затем три полученные сотни. Этот пример делает достаточно понятным следующее практическое правило:

суммирование большого числа слагаемых должно быть организовано так,

чтобы на каждом шагу складывались по возможности близкие числа.

Чтобы скрупулезно следовать этому правилу, пришлось бы перебирать очень много разных вариантов суммирования. Обычно поступают проще: располагают все слагаемые по возрастанию и складывают их последовательно от наименьшего к наибольшему. Можно доказать, что этот способ лучше любого другого, если не расставлять скобок (не разбивать слагаемые на группы).

Пример 3. В этом примере первый, «плохой», способ счета дает значительную ошибку по двум причинам: сначала мы находили разность близких чисел $\sqrt{290}$ и 17, а затем делили (единицу) на эту малую разность. Очевидно, относительная ошибка разности близких чисел x и y может оказаться гораздо больше, чем их собственные ошибки ω_x и ω_y , а при делении на малое число может сильно вырасти абсолютная ошибка (см. формулы для ω_{x-y} и $\Delta_{x/y}$ в таблице 1). Поэтому

следует по возможности избегать вычитания близких чисел и деления на малые числа.

Пренебрежение этими правилами порой приводит к неприятностям даже в самых, казалось бы, безобидных ситуациях. Попробуем, например, решить квадратное уравнение $x^2 + 9,9x - 1 = 0$, округляя все результаты до двух значащих цифр. Найдем дискриминант: $D = 9,9^2 + 4 = 102,01$; после округления получим $D = 100$. Если вычислять корни по обычной формуле для решения квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ ($x_{1,2} = (-p \pm \sqrt{D})/2$) мы получим $x_1 = (-9,9 + 10)/2 = 0,05$, $x_2 = -9,95 \approx -10$. Корень x_2 (после округления) совпал со своим точным значением, но x_1 отличается от точного значения 0,1 в 2 раза! При вычислении x_1 вычитались близкие числа 10 и 9,9 и их верные цифры просто взаимно уничтожились. Избежать ошибки здесь можно, заменив выражение $(-p + \sqrt{D})/2$ равным ему выражением $-2q/(p + \sqrt{D}) = -2/(9,9 + 10) \approx 0,1$, не содержащим разности близких чисел. (Но заметим, что при вычислении по этой формуле корня x_2 получается $x_2 = -20!$)

Пример 4 иллюстрирует ситуацию, когда очень маленькая разница в исходных данных (коэффициентах системы линейных уравнений) ведет к очень большой разнице в ответах. Если в рассмотренных системах мы не можем га-

рантировать правильность *всех* цифр коэффициентов, то нельзя доверять ни одной цифре ответов. Как возникла эта ситуация? Дело в том, что вторые уравнения всех трех систем с высокой точностью совпадают с уравнением $1,5x + 7,5y = 25,5$, которое просто эквивалентно первому уравнению $x + 5y = 17$. С геометрической точки зрения все эти уравнения задают близкие прямые. Но ясно, что одна прямая может быть очень близка к другой и при этом пересекать ее в любой заданной точке. Поэтому при «малом шевелении» одной из двух «почти совпадающих» прямых точка их пересечения может сдвинуться весьма значительно. С алгебраической же точки зрения неустойчивость решений наших систем относительно изменений коэффициентов объясняется тем, что при нахождении неизвестных нам неизбежно придется делить на малый знаменатель. А это, как мы видели, ведет к большим ошибкам.

Какие же можно сделать выводы?

Прежде всего, нужно ясно понимать, что даже хорошая точность исходных данных еще не гарантирует столь же хорошую точность результата. При этом результат может зависеть от способа вычисления и даже от порядка выполнения операций. Таким образом,

одной из главных задач при приближенных вычислениях является задача о выборе наилучшей последовательности вычислений.

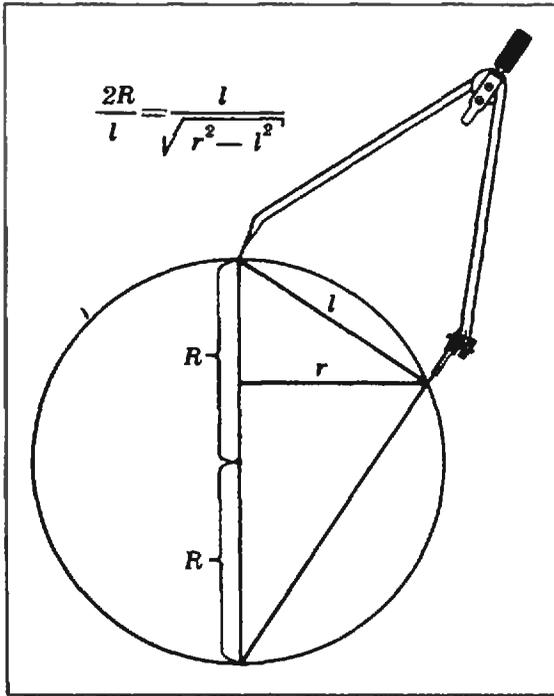
Продумывая последовательность вычислений, кроме уже приведенных правил, нужно учитывать и то, что каждая операция может вносить свою ошибку округления. Поэтому дадим еще один совет:

старайтесь свести к минимуму число операций.

Две практические задачи

Задача 1. На бумаге нарисован параллелограмм. Требуется найти его площадь и оценить ошибку. (В нашем распоряжении имеются линейка, циркуль и транспортир).

Известны две формулы для площади параллелограмма: $S = ab \sin \alpha$ и $S = ah$ (a, b — его стороны, α — угол между ними, h — высота, опущенная на сторону a). Ясно, что лучше взять вторую формулу, потому что она требует на одно измерение и на одну арифметическую операцию меньше, чем первая,



$$\frac{2R}{l} = \frac{l}{\sqrt{r^2 - l^2}}$$

Легко видеть, что тогда $R = l^2 / 2\sqrt{l^2 - r^2}$, то есть искомая площадь равна

$$S = 4\pi R^2 = \frac{\pi l^2}{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2}$$

Проанализируем эту формулу. Если r близко к l (то есть раствор циркуля мал по сравнению с размерами шара), в знаменателе будет стоять разность близких чисел. Поэтому ошибка результата может быть очень большой. Значит, нужно постараться, чтобы радиус окружности как можно больше отличался от l . Этого легко добиться для бильярдного шара (особенно, если циркуль с кривыми ножками). Но если шар большой, получить заслуживающий доверия результат обычным циркулем практически невозможно.

Например, при $l=6,0$ см, $r=3,0$ см получаем $S=48$ см², причем $|\Delta_S| < 2,2$ см², если граница абсолютной ошибки измерений составляет 0,1 см, — это вполне удовлетворительная точность. Но допустим, что измерения на большом шаре дали результаты $l=6,3$ см, $r=6,0$ см и, соответственно, $S=427$ см². Тогда при изменении данных на 0,1 см получим для $l=6,2$ см, $r=6,1$ см — $S=1201$ см², а для $l=6,4$ см, $r=5,9$ см — $S=273$ см². Следовательно, приближение $S=427$ см² в этом случае очень и очень грубое и находить таким способом площадь поверхности большого шара нельзя. Нужно либо найти циркуль побольше, либо заменить линейку и циркуль более точными инструментами, либо... придумать другой способ вычисления радиуса.

к тому же в первой формуле нужно находить $\sin \alpha$. (Правда, построение высоты циркулем и линейкой тоже вносит некоторую погрешность, но на общую ошибку она влияет мало.) Допустим, что измерения дали такие результаты: $a=20,2$ см, $h=11,3$ см. Поскольку они проводились линейкой, $|\Delta_a| < 0,1$ см, $|\Delta_h| < 0,1$ см, а относительные ошибки не превосходят 0,01.

Умножая a на h , получаем $S = 228,26$ см². При этом можно гарантировать, что найденное число отличается от истинного не более чем на $20,2 \cdot 0,1 + 11,3 \cdot 0,1 + 0,1^2 = 3,16$ (см²) (см. формулу для $|\Delta_{xy}|$ в таблице 2). Это может показаться удивительным — ошибка в 0,1 см в исходных данных приводит к ошибке, большей 3 см² в результате! Но именно такова разница между площадями в двух предельных случаях: $a=20$ см, $h=11,2$ см и $a=20,3$ см, $h=11,4$ см.

Задача 2. Имея в распоряжении циркуль и линейку (с делениями), найти площадь поверхности бильярдного шара.

Найдем сначала радиус шара R . Для этого нарисуем на шаре циркулем окружность и отметим на ней три точки A , B , C . Измеряя циркулем попарные расстояния между этими точками, перенесем этот треугольник на плоскость и опишем около него окружность. Пусть r — радиус этой окружности, а l — исходный раствор циркуля (см рисунок).

Упражнения

1. Всегда ли верны следующие равенства в арифметике приближенных вычислений:

- а) $(a+b)-c = a+(b-c) = (a-c)+b$,
 б) $(ab)/c = a(b/c) = (a/c)b$, в) $(a-b)c + ac = bc$,
 г) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 11,04x - 10,49y = 1, \\ 10,49x - 10,04y = 0, \end{cases}$$

округлив коэффициенты: а) до двух, б) до трех значащих цифр. Сравните результаты с ответом, полученным при вычислениях с четырьмя значащими цифрами.

3. Придумайте в примере 1 наилучшую последовательность вычислений.

Литература

1. Иванова Т. П., Пухова Г. В. Программирование и вычислительная математика. — М.: Просвещение, 1978.

2. Мак-Кракен Д., Дори У. Численные методы и программирование на фортране. — М.: Мир, 1977.



Волны кристаллизации

Кандидат физико-математических наук
А. Я. ПАРШИН

Можно ли на поверхности твердого тела возбудить волны, подобные обычным волнам на воде? Поверхность жидкости, как мы знаем, может перемещаться и испытывать колебания просто благодаря текучести. В твердом теле такой процесс невозможен (на то оно и твердое!). Однако можно, оказывается, заставить двигаться поверхность твердого тела, например кристалла, оставляя само тело неподвижным. Для этого достаточно, чтобы кристалл рос или плавился — при этом его поверхность непрерывно перемещается, хотя само вещество в объеме кристалла остается совершенно неподвижным.

Но означает ли это, что таким путем можно возбудить свободные колебания поверхности кристалла, обусловленные периодической сменой процессов плавления и кристаллизации? Представьте себе, например, плоскую поверхность кристалла льда, находящегося в равновесии с водой при температу-

ре 0°C . Что произойдет, если в каком-то месте нарушить равновесие; сделать на поверхности лунку (или выступ)? Возникнут ли при этом волны кристаллизации — плавления, аналогичные волнам, образуемым упавшим в воду камнем?

Оказывается — нет, в обычных веществах это невозможно. Дело в том, что интересующие нас волны, как и вообще любые свободные колебания, могут существовать только в условиях, когда необратимые потери энергии достаточно малы. Эти потери вызывают затухание колебаний, энергия колебаний при этом переходит в тепло. Если потери велики, движение становится аperiодическим, то есть колебаний вообще не возникает. Рост и плавление обычных кристаллов всегда сопровождается очень большими потерями энергии (вызванными, главным образом, большим значением удельной теплоты плавления). Поэтому в нашем воображаемом эксперименте вместо воли кристаллизации мы наблюдали бы лишь очень медленное зарастание первоначальной лунки.

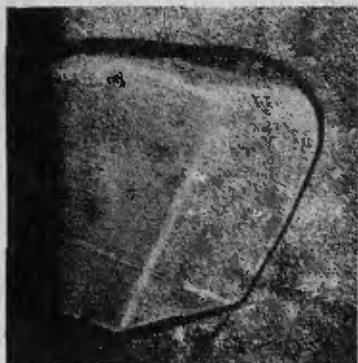
И все-таки волны кристаллизации существуют! Правда, их удается наблюдать лишь при температурах, близких к абсолютному нулю (ниже 1K) и только в гелии — веществе, совершенно уникальном по своим физическим свойствам. Эти свойства — тема для очень обстоятельного разговора, здесь же мы лишь упомянем о двух из них, имеющих самое прямое отношение к вопросу о волнах кристаллизации.

Во-первых, гелий — единственное вещество, которое может оставаться в жидком состоянии вплоть до абсолютного нуля и кристаллизуется лишь при повышенных давлениях (выше 25 атм). Во-вторых, рост и плавление кристал-

лов гелия при очень низких температурах сопровождается ничтожными потерями энергии, причем чем ниже температура, тем потери меньше. Поэтому кристаллы гелия могут расти и плавиться с фантастическими, по обычным меркам, скоростями и, что очень важно, даже при чрезвычайно слабых внешних воздействиях. А это и есть главное условие, необходимое для существования волн кристаллизации.

Посмотрите на кристаллик гелия, изображенный на фотографии. Кристаллик размером около 3 мм , выращенный при температуре $0,5\text{ K}$, висит на стенке экспериментальной камеры, «прицепившись» к ней своим левым боком. Со всех остальных сторон он окружен жидким гелием под давлением 25 атм . Возбудить волны кристаллизации на таком кристаллике столь же просто, как возбудить волны в стакане воды — для этого достаточно чуть потрясти камеру. Именно такой момент зафиксирован на фотографии.

Любопытно, что не вся поверхность кристалла обладает способностью к сверхбыстрой кристаллизации. Участки, определенным образом ориентированные относительно кристаллографических осей (в настоящее время известны три такие «особые» ориентации), выглядят как идеально плоские грани и остаются совершенно неподвижными, то есть ведут себя как поверхность обычного кристалла, имеющего естественную огранку. Кстати, наличие этих «особых» граней наглядно подтверждает, что мы действительно имеем дело с кристаллом, причем с кристаллом высокого качества. Все остальные участки поверхности скруглены и быстро колеблются при малейшем внешнем воздействии (в данном случае период колебаний порядка $0,01\text{ с}$, а их амплитуда $\sim 0,1\text{ мм}$).





**15 апреля -
День
советской науки**

XX век — время бурного развития науки; время, когда судьбу научного исследования решает не гениальный ученый-одиночка в окружении самодельных приборов, а целый научный коллектив, оснащенный сложной аппаратурой, изготовленной многими отраслями промышленности на основе самой совершенной технологии. Организованная СССР серия специализированных международных выставок «Аппаратура и приборы для научных исследований» была призвана продемонстрировать современный уровень оснащённости лабораторий ученых. С 6 по 20 сентября прошлого года в Москве в парке Сокольники и на Красной Пресне проходила III выставка из этой серии — «Наука-83». В ней приняли участие 20 стран.

Несмотря на сложности международной обстановки, выставка способствовала широкому обмену достижениями и опытом, послужила дальнейшему прогрессу науки и техники и создала благоприятные условия для укрепления научно-технического сотрудничества и расширения торгово-экономических связей между многими странами мира.

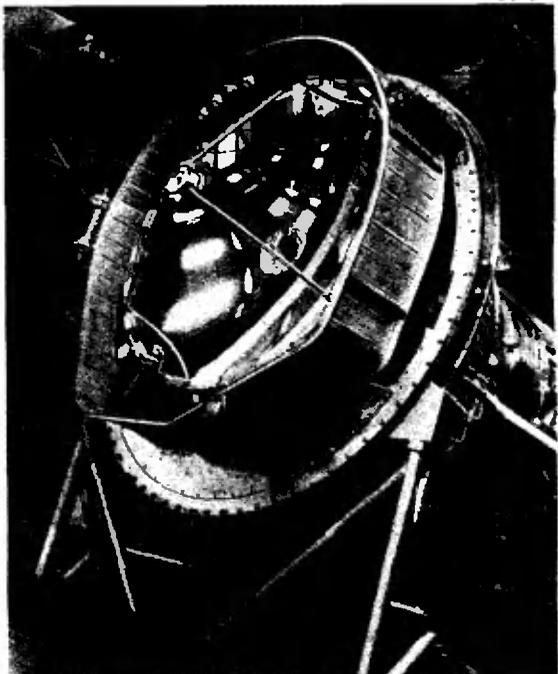
Впервые для демонстрации успехов, достигнутых нашей страной в области разработки и производства аппаратуры и приборов для научных исследований, был организован отдельный павильон Советского Союза. Экспозиция СССР состояла из 730 экспонатов, половина из которых демонстрировалась в действии.

Здесь приводятся фотографии трех экспонатов, демонстрировавшихся на выставке.

В. М. Каслин

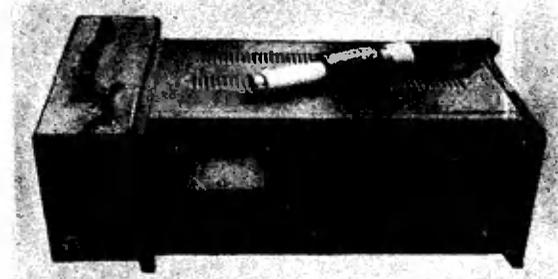


Рефрижератор КР-81 для получения сверхнизких температур (0,36 К) с помощью гелия-3 (^3He). В нем впервые использован для охлаждения гелия-3 метод адиабатического расширения, что позволило отказаться от громоздких насосных систем и создать компактный портативный прибор, который можно использовать в космических аппаратах, аэростатах и т. п.



Бортовой субмиллиметровый телескоп БСТ-1М — уникальное инженерно-техническое сооружение, оснащенное самым большим для таких телескопов зеркалом (диаметр 1,5 м) и автономной системой охлаждения (до гелиевых температур) рефрижераторного типа. Он предназначен для проведения астрофизических и астрономических исследований с борта орбитальной пилотируемой станции «Салют-6» в областях спектра 60—130 и 300—1000 мкм и на ультрафиолетовой линии 0,256 мкм. В этой области спектра можно получать информацию о процессах, происходящих в верхних слоях земной атмосферы. С другой стороны, эта область спектра интересна также тем, что позволяет изучать холодные газовые космические облака — возможные места образования звезд.

Газоанализатор на кислород типа ГМ-6А предназначен для определения кислорода в смеси газов при очень малом его относительном содержании (порядка 10^{-5}). Этот прибор основан на явлении изменения теплопроводности кислорода под действием магнитного поля. Аналогичные эффекты в других газах приблизительно в миллион раз меньше. Отсюда, в частности, появилась возможность с успехом использовать такие приборы для быстрого определения степени негерметичности вакуумных объемов путем определения скорости затекания в них атмосферного воздуха (в котором содержится около 20 % кислорода). При использовании традиционных, неизбирательных к кислороду вакуумметров для получения правильных результатов приходится дожидаться прекращения газоотделения с внутренних поверхностей объемов, которое обычно довольно велико (особенно за счет легкоконденсируемых веществ, в частности, паров воды). Разработанный прибор аналогов в мире не имеет. Он вызывает большой интерес и находит все большее применение в пародном хозяйстве.





Центр тяжести облегчает решение

Кандидат физико-математических наук
М. Б. БАЛК,
член-корреспондент АИИ СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

Решения многих геометрических задач можно получить, привлекая свойства центра масс (или, как еще говорят, «барицентра») системы материальных точек. Эти «барицентрические» решения используют понятия, заимствованные из механики: масса, материальная точка, центр масс, правило рычага, и опираются на наглядные физические соображения. Как говорил выдающийся

французский математик и физик А. Пуанкаре (1854—1912), эти соображения, «во-первых, дают нам предчувствие решения, и, во-вторых, подсказывают правильный ход рассуждений». Вместе с тем «барицентрические решения» являются, как мы увидим, математически совершенно строгими.

Материальной точкой будем называть пару (A, m) , где A — произвольная точка, а m — действительное число («масса», которая «сосредоточена» в точке A). Заметим, что в математических приложениях число m можно считать не только положительным (как в механическом понимании массы), но и отрицательным. Чтобы не писать лишних скобок, условимся материальную точку (A, m) обозначать через mA .

Теорема (о центре масс). Пусть задана система материальных точек

$$m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n \quad (1)$$

с ненулевой суммарной массой $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Тогда существует единственная точка Z , удовлетворяющая условию (рис. 1)

$$m_1 \vec{ZA}_1 + m_2 \vec{ZA}_2 + \dots + m_n \vec{ZA}_n = \vec{0}. \quad (2)$$

Эта точка Z называется центром масс (или барицентром) системы (1).

Доказательство. Фиксируем произвольную точку O . Равенство (2) равносильно соотношению

$$m_1(\vec{OA}_1 - \vec{OZ}) + m_2(\vec{OA}_2 - \vec{OZ}) + \dots + m_n(\vec{OA}_n - \vec{OZ}) = \vec{0},$$

то есть соотношению

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \vec{OZ} = m_1 \vec{OA}_1 + m_2 \vec{OA}_2 + \dots + m_n \vec{OA}_n, \quad (3)$$

или, что то же самое, соотношению

$$\vec{OZ} = \frac{1}{m} (m_1 \vec{OA}_1 + m_2 \vec{OA}_2 + \dots + m_n \vec{OA}_n). \quad (4)$$

Так как вектор, стоящий в правой части равенства (4), известен (поскольку точки A_1, A_2, \dots, A_n , O и числа m_1, m_2, \dots, m_n заданы), то точка Z , удовлетворяющая соотношению (4) (а значит, и соотношению (2)), существует и определена однозначно.

Следствие. Пусть Z — центр масс системы материальных точек (1). Тогда для любой точки O справедливы равенства (3) и (4). Обратно, если для какой-либо одной точки O справедливо равенство (3) (или (4)), то Z — центр масс системы (1).

Это непосредственно вытекает из того, что равенства (2), (3) и (4) равносильны.

Другим важным следствием теоремы о центре масс является архимедово

Правило рычага. Если m_1 и m_2 — положительные массы, расположенные в точках A_1 и A_2 , то их барицентр Z находится на отрезке A_1A_2 и

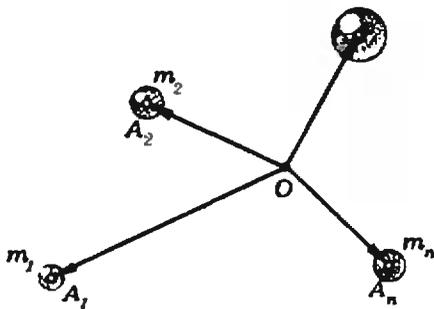


Рис. 1

делит его обратно пропорционально массам, то есть

$$|A_1Z| : |A_2Z| = m_2 : m_1.$$

Доказательство. Согласно формуле (2),

$$m_1 \vec{ZA}_1 + m_2 \vec{ZA}_2 = \vec{0}.$$

Это равенство означает, что векторы $m_1 \vec{ZA}_1$ и $m_2 \vec{ZA}_2$ имеют одинаковые длины (и противоположны). Значит, $m_1 |ZA_1| = m_2 |ZA_2|$,

$$\text{откуда} \quad |A_1Z| : |A_2Z| = m_2 : m_1.$$

Задачи

1. Докажите, что центр масс материальных точек m_1A_1 и m_2A_2 ($m_1 + m_2 \neq 0$) в том и только в том случае расположен в середине отрезка A_1A_2 , когда $m_1 = m_2$.

2. Дано, что $\vec{A_0A_1} = \vec{A_1A_2} = \vec{A_2A_3} = \vec{A_3A_4} \neq \vec{0}$. При каком t барицентр материальных точек $3A_0$ и tA_5 располагается в точке A_3 ? При каком p барицентр материальных точек $3A_0$ и pA_2 располагается в точке A_5 ?

3. Дано, что $\vec{BM} = (0,7)\vec{BA}$. Какими массами следует загрузить точки A и B , чтобы барицентром двух получившихся материальных точек оказалась точка M ?

4. В вершинах параллелограмма $ABCD$ расположены такие массы m_A, m_B, m_C, m_D (с ненулевой суммарной массой), что центр масс получающихся четырех материальных точек совпадает с центром параллелограмма. Докажите, что $m_A = m_C$ и $m_B = m_D$.

5. Докажите, что если в трех вершинах A, B, C параллелограмма $ABCD$ поместить массы 1, $-1, 1$, то их барицентром будет четвертая вершина.

6. В вершинах A, B, C параллелограмма $ABCD$ помещены массы m_1, m_2, m_3 . Докажите, что барицентр этих трех материальных точек совпадает с барицентром трех других материальных точек: $(m_1 + m_2)A, (m_2 + m_3)C, -m_3D$.

7. Пусть (1) — система материальных точек (на плоскости или в пространстве) и f — такое перемещение (плоскости или пространства), при котором система (1) переходит в себя, то есть система материальных точек $m_1f(A_1), m_2f(A_2), \dots, m_nf(A_n)$ совпадает, с точностью до порядка, с исходной системой (1). Докажите, что барицентр Z системы (1) является неподвижной точкой перемещения f , то есть $f(Z) = Z$.

8. Докажите, что если система (1) симметрична относительно плоскости α , то ее центр масс лежит в плоскости α .

9. Докажите, что если система (1) переходит в себя при повороте вокруг некоторой прямой l на угол φ , где $0 < \varphi < 2\pi$, то центр масс системы (1) принадлежит прямой l .

10. Система (1) переходит в себя при повороте на некоторый угол вокруг прямой l_1 , а также при повороте на некоторый угол вокруг прямой l_2 (углы поворота заключены между 0 и 2π). Докажите, что прямые l_1 и l_2 пересекаются, и их точка пересечения является центром масс системы (1).

11. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол φ , где $0 < \varphi < 2\pi$. Докажите, что $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = \vec{0}$.

Теорема (о группировке масс). Пусть в системе материальных точек (1) отмечены k точек m_1A_1, \dots, m_kA_k , причем $m_1 + \dots + m_k \neq 0$, $m_1 + \dots + m_n \neq 0$. Если всю массу отмеченных точек сосредоточить в их барицентре C , то от этого положение барицентра Z всей системы (1) не изменится. Иначе говоря, система материальных точек $(m_1 + \dots + m_k)C, m_{k+1}A_{k+1}, \dots, m_nA_n$ и исходная система (1) имеют один и тот же центр масс.

Доказательство. Фиксируем точку O . Так как Z — центр масс системы (1), а C — центр масс отмеченных материальных точек, то

$$\begin{aligned} (m_1 + \dots + m_k + m_{k+1} + \dots + m_n) \vec{OZ} &= \\ &= m_1 \vec{OA}_1 + \dots + m_k \vec{OA}_k + m_{k+1} \vec{OA}_{k+1} + \dots + m_n \vec{OA}_n, \\ (m_1 + \dots + m_k) \vec{OC} &= m_1 \vec{OA}_1 + \dots + m_k \vec{OA}_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (m_1 + \dots + m_k + m_{k+1} + \dots + m_n) \vec{OZ} &= \\ &= (m_1 + \dots + m_k) \vec{OC} + m_{k+1} \vec{OA}_{k+1} + \dots + m_n \vec{OA}_n, \end{aligned}$$

а это и значит, что центром масс системы материальных точек $(m_1 + \dots + m_k)C, m_{k+1}A_{k+1}, \dots, m_nA_n$ является та же точка Z .

Пример 1. Докажите, что медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке и каждая медиана делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

Решение. Пусть AA', BB', CC' — медианы треугольника ABC (рис. 2), а Z — центр масс трех материальных точек $1A, 1B, 1C$. Так как C' является центром масс двух материальных точек $1A$ и $1B$, то, сосредоточив массы точек A и B в точке C' , мы получим, согласно предыдущей теореме, что Z совпадает с центром масс двух материальных точек $2C'$ и $1C$. Следовательно, $Z \in [CC']$ и $|CZ| : |C'Z| = 2:1$. Аналогично доказывается, что точка Z принадлежит двум другим медианам и делит каждую из них в отношении 2:1.

Замечание. Можно условиться в формулах (3), (4) не писать букву O и стрелки над векторами, то есть применять вместо (3) и (4) сокращенные записи:

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) Z = m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n, \quad (3')$$

$$Z = \frac{m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (4')$$

Такая форма записи сокращает решение задач. Например, решение примера 1 можно будет изложить следующим образом. Пусть Z — барицентр точек $1A, 1B, 1C$. Тогда

$$Z = \frac{1A + 1B + 1C}{3} = \frac{(1A + 1B) + 1C}{3} = \frac{2C' + 1C}{3},$$

то есть Z — центр масс материальных точек $2C'$ и $1C$, и потому $Z \in [CC']$ и $|CZ| : |C'Z| = 2:1$. Для двух других медиан рассуждение аналогично.

Пример 2. На стороне BC треугольника ABC взята такая точка D , что $|BD| : |DC| = 5:1$ (рис. 3). В каком отношении медиана CE делит отрезок AD ?

Решение. Рассмотрим материальные точки $1A,$

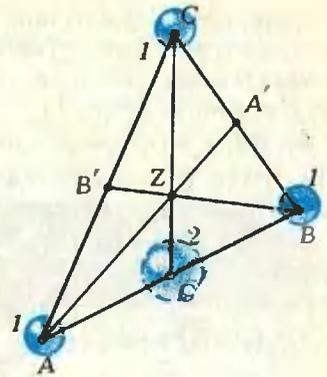


Рис. 2.

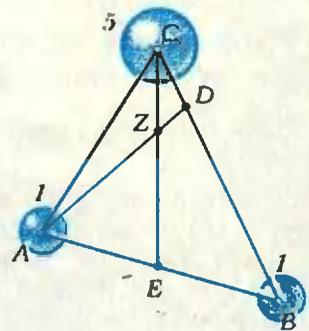


Рис. 3.

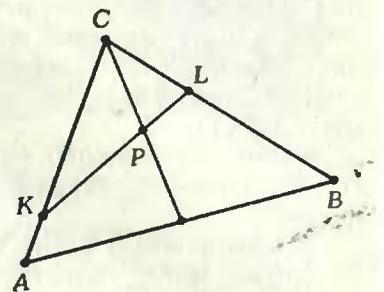


Рис. 4.

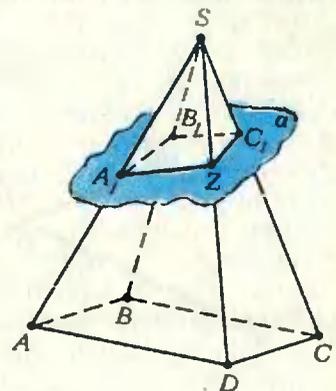


Рис. 5.

1B, 5C (так что $E = \frac{1A+1B}{2}$, $D = \frac{1B+5C}{6}$) и обозначим через Z барицентр этих трех материальных точек. Тогда

$$Z = \frac{1A+1B+5C}{7} = \frac{(1A+1B)+5C}{7} = \frac{2E+5C}{7},$$

и потому $Z \in [CE]$; далее,

$$Z = \frac{1A+1B+5C}{7} = \frac{1A+(1B+5C)}{7} = \frac{1A+6D}{7},$$

то есть $Z \in [AD]$. Следовательно, Z — точка пересечения отрезков CE и AD .

Из равенства $Z = \frac{1A+6D}{7}$ по правилу рычага вытекает, что $|AZ| : |ZD| = 6 : 1$.

Следующие два примера показывают, что иногда удобно поместить в одной и той же точке несколько масс.

Пример 3. В треугольнике SAB (рис. 4) проведена медиана CD . На сторонах SA и SB выбраны такие точки K и L , что $|CK| = 4|KA|$, $2|CL| = |LB|$.

В каком отношении точка P пересечения прямых KL и CD делит медиану CD ? В каком отношении точка P делит отрезок KL ?

Решение. Рассмотрим систему материальных точек $1C$, $4A$, $4B$, $8C$ (так что $K = \frac{1C+4A}{5}$, $D = \frac{4A+4B}{8}$, $L = \frac{4B+8C}{12}$) и обозначим через P барицентр этой системы. Тогда

$$P = \frac{1C+4A+4B+8C}{17} = \frac{(1C+4A)+(4B+8C)}{17} = \frac{5K+12L}{17},$$

то есть $P \in [KL]$;

$$P = \frac{(4A+4B)+(1C+8C)}{17} = \frac{8D+9C}{17},$$

то есть $P \in [CD]$.

Следовательно, P есть точка пересечения отрезков KL и CD . Из написанных равенств вытекает, согласно правилу рычага, что $|KP| : |PL| = 12 : 5$, $|CP| : |PD| = 8 : 9$.

Пример 4. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$ (рис. 5). Плоскость α отсекает от трех боковых ребер SA , SB , SC соответственно треть, четверть, пятую часть (считая от вершины S). Какую часть отсекает она от четвертого бокового ребра?

Решение. Пусть A_1 , B_1 , C_1 — точки встречи плоскости α с ребрами SA , SB , SC . Поместим в точках A , B , C , в которых оканчиваются эти ребра, соответственно массы 1 , -1 , 1 (так, чтобы цент-

ром масс получившихся трех материальных точек был конец D четвертого ребра, см. задачу 5). Далее, в точке S поместим такие три массы, чтобы вместе с уже взятыми материальными точками $1A$, $(-1)B$, $1C$ они имели в качестве центров масс точки A_1 , B_1 , C_1 . Так как, по условию

$$|SA_1| : |A_1A| = 1 : 2, \quad |SB_1| : |B_1B| = 1 : 3, \\ |SC_1| : |C_1C| = 1 : 4,$$

мы получаем

$$A_1 = \frac{1A+2S}{3}, \quad B_1 = \frac{(-1)B+(-3)S}{-4},$$

$$C_1 = \frac{1C+4S}{5}.$$

Обозначим через Z центр масс всех шести материальных точек $1A$, $(-1)B$, $1C$, $2S$, $(-3)S$, $4S$. Тогда

$$Z = \frac{(1A+2S)+((-1)B+(-3)S)+(1C+4S)}{4} = \\ = \frac{3A_1+(-4)B_1+5C_1}{4},$$

откуда видно, что $Z \in \alpha$. Далее,

$$Z = \frac{(1A+(-1)B+1C)+(2S+(-3)S+4S)}{4} = \\ = \frac{1D+3S}{4},$$

откуда видно, что $Z \in [SD]$. Следовательно, Z — искомая точка пересечения плоскости α с ребром $[SD]$. Из равенства $Z = \frac{1D+3S}{4}$ следует, согласно правилу рычага, что $|SZ| : |ZD| = 1 : 3$, и потому $|SZ| = \frac{1}{4}|SD|$.

Задачи

12. Пусть в вершинах A , B , C некоторого треугольника помещены положительные массы m_A , m_B , m_C и Z — барицентр этих трех материальных точек. Обозначим через A' точку пересечения прямой AZ со стороной BC . Докажите, что A' — центр масс двух материальных точек $m_B B$ и $m_C C$.

13. Пусть в вершинах A , B , C некоторого треугольника помещены массы m_A , m_B , m_C . Обозначим через A' барицентр материальных точек $m_B B$ и $m_C C$, через B' — барицентр материальных точек $m_C C$ и $m_A A$, а через C' — барицентр материальных точек $m_A A$ и $m_B B$. Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.

14. Пусть в системе (1) отмечены k точек $m_1 A_1, \dots, m_k A_k$ и пусть S — барицентр отмеченных материальных точек, а D — барицентр остальных точек $m_{k+1} A_{k+1}, \dots, m_n A_n$ (предполагается, что $m_1 + \dots + m_k \neq 0$, $m_{k+1} + \dots + m_n \neq 0$, $m_1 + \dots + m_n \neq 0$). Докажите, что барицентр двух материальных точек $(m_1 + \dots + m_k) S$ и $(m_{k+1} + \dots + m_n) D$ совпадает с барицентром Z исходной системы (1).

15. Из четырех точек A , B , C , D никакие три не лежат на одной прямой. Точки M и N — середины отрезков AB и CD , Z — середина отрезка MN , P — точка пересечения медиан треугольника BCD . Лежат ли точки A , Z , P на одной прямой?

16. В четырехугольнике $ABCD$ отрезок KL соединяет середины двух противоположных сторон, отрезок MN соединяет середины двух других противоположных сторон, а отрезок PQ соединяет середины диагоналей. Докажите, что отрезки KL , MN и PQ пересекаются в одной точке Z и каждый из них делится в этой точке пополам.

17. В четырехугольнике $ABCD$ точки пересечения медиан треугольников BCD , ACD , ABD , ABC обозначены через A' , B' , C' , D' . Докажите, что каждый из отрезков AA' , BB' , CC' , DD' проходит через точку Z , рассмотренную в предыдущей задаче, и делится точкой Z в отношении 3 : 1, считая от вершин четырехугольника.

18. В тетраэдре проведены три отрезка, каждый из которых соединяет середины двух противоположных ребер. Докажите, что эти три отрезка пересекаются в одной точке Z и каждый из них делится в этой точке пополам.

19. В тетраэдре проведены четыре отрезка, каждый из которых соединяет одну из вершин с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что эти четыре отрезка пересекаются в точке Z , рассмотренной в предыдущей задаче, и делятся этой точкой в отношении 3 : 1, считая от вершин.

20. На сторонах шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ последовательно отмечены их середины B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 , B_6 . Будет ли точка пересечения медиан треугольника $B_1B_3B_5$ совпадать с точкой пересечения медиан треугольника $B_2B_4B_6$?

21. Даны шесть точек, из которых никакие три не принадлежат одной прямой. Точка пересечения медиан треугольника с вершинами в каких-либо трех из этих точек соединена отрезком с точкой пересечения медиан треугольника с вершинами в остальных трех точках. Докажите, что все возникающие таким образом 10 отрезков имеют общую середину.

22. Противоположные стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ разделены точками M и N в одном и том же отношении k (то есть $\vec{AM} = k\vec{MB}$, $\vec{DN} = k\vec{NC}$); P и Q — середины сторон AD и BC . В каком отношении делится каждый из отрезков MN и PQ точкой их пересечения?

23. Противоположные звенья AB и DC пространственной замкнутой ломаной $ABCD$ разделены точками M и N в одном и том же отношении k ; отрезки BC , MN , AD разделены точками P , Q , R в одном и том же отношении l . Докажите, что точки P , Q , R лежат на одной прямой.

24. Звенья AB , BC , CD , DA пространственной замкнутой ломаной $ABCD$ разделены точками M , N , P , Q соответственно в отношениях α : β , β : γ , γ : δ , δ : α , где α , β , γ , δ — положительные числа. Докажите, что точки M , N , P , Q лежат в одной плоскости. В каком отношении делятся отрезки MP и NQ точкой их пересечения?

25. Каждое звено замкнутой пространственной ломаной $A_1A_2 \dots A_{2n}A_1$ пересекает плоскость α в одной точке, причем звено A_iA_{i+1} делится точкой пересечения с плоскостью α в отношении k_i ($i = 1, 2, \dots, 2n - 1$). В каком отношении звено $A_{2n}A_1$ делится точкой пересечения с плоскостью α ?

26. На сторонах треугольника ABC взяты такие точки M и N , что $\vec{CN} = \alpha\vec{CA}$, $\vec{CM} = \beta\vec{CB}$. Пусть S — точка пересечения прямых AM и BN . Вычислите отношения $|AS| : |AM|$, $|BS| : |BN|$.

27. На сторонах KL и LM треугольника KLM взяты такие точки A и B , что $|LA| = 3|AK|$, $|LB| = 4|BM|$. Вычислите отношение площадей треугольников KLM и KLC , где C — точка пересечения прямых AM и KB .

28. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC взяты такие точки C_1 , A_1 , B_1 , что $|AC_1| =$

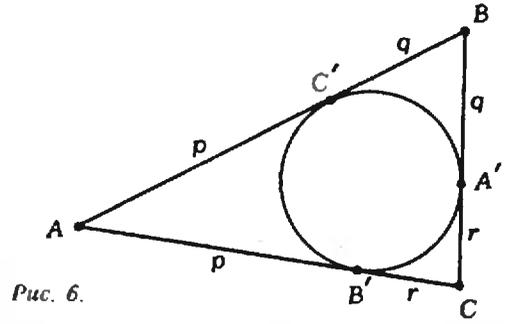


Рис. 6.

$$= \frac{1}{3}|AB|, |BA_1| = \frac{1}{3}|BC|, |CB_1| = \frac{1}{3}|CA|;$$

При пересечении отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 образовался треугольник $A_2B_2C_2$. Найдите отношение площадей треугольников $A_2B_2C_2$ и ABC .

Указание. Найдите, в каком отношении точка A_2 делит отрезки BB_1 и CC_1 (и аналогично, для точек B_2 и C_2).

29. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1. Точка M делит сторону BC в отношении 3 : 5. Вычислите площадь четырехугольника $CMPD$, где P — точка пересечения прямых AM и BD .

30. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка M , отсекающая $\frac{1}{n}$ часть этой стороны, то есть $|AM| = \frac{1}{n}|AB|$. Какую часть диагонали AC отсекает прямая DM ?

31. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон BC , CA , AB соответственно в точках A' , B' , C' . Докажите, что отрезки AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке.

Указание. Введем обозначения: $|AC'| = |AB'| = p$, $|BC'| = |BA'| = q$, $|CA'| = |CB'| = r$ (рис. 6). Загрузим вершины A , B , C массами $1/p$, $1/q$, $1/r$. Убедитесь, что C' — барицентр

двух материальных точек $\frac{1}{p}A$ и $\frac{1}{q}B$, и потому (по теореме о группировке масс) барицентр Z системы материальных точек $\frac{1}{p}A$, $\frac{1}{q}B$, $\frac{1}{r}C$ лежит на отрезке CC' . Аналогично проверьте, что $Z \in \{AA'\}$ и $Z \in \{BB'\}$.

32. В угол PAQ вписана окружность, которая касается сторон угла в точках P и Q . Прямая BC ($B \in \{AP\}$, $Q \in \{AQ\}$) касается окружности в точке T . Прямые BQ и CP пересекаются в точке M . Лежат ли точки M , T , A на одной прямой?

33. На сторонах треугольника ABC или на их продолжениях выбраны такие точки A_1 , B_1 , C_1 , что $\vec{BA}_1 = \alpha\vec{A_1C}$, $\vec{CB}_1 = \beta\vec{B_1A}$, $\vec{AC}_1 = \gamma\vec{C_1B}$. Докажите, что если $\alpha\beta\gamma = -1$, то точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой (теорема Менелая).

Указание. Рассмотрите систему из четырех материальных точек $1A$, γB , $(-1)A$, $\alpha\gamma C$.

34. Докажите, что если при обозначениях предыдущей задачи выполнено равенство $\alpha\beta\gamma = 1$, то прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны (теорема Чевы).

Указание. Загрузите вершины A , B , C массами 1 , γ , α и докажите, что при $1 + \gamma + \alpha\gamma \neq 0$ центр масс этих трех материальных точек принадлежит каждой из прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 .

35. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α отсекает от трех боковых ребер SA , SB , SC соответственно подовину, две трети, три четверти (считая от вершины S). Какую часть отсекает она от четвертого бокового ребра?



Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Столкновения тел» предназначена восьмиклассникам, «Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях» — девятиклассникам, «Рентгеновские лучи» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

Столкновения тел

В учебнике «Физика 8» сказано, что законы сохранения позволяют решать некоторые задачи механики даже тогда, когда не известны действующие на тело силы. К такому случаю относится, например, задача об упругом столкновении шаров.

Для простоты мы рассмотрим удар двух шаров с массами m_1 и m_2 , из которых первоначально один покоится ($v_1=0$), а второй движется по направлению к первому со скоростью \vec{v}_2 (рис. 1). При столкновении происходит так называемый центральный (или лобовой) упругий удар. Каковы скорости обоих шаров после столкновения?

Чтобы ответить на этот вопрос, попытаемся воспользоваться законами сохранения энергии и импульса, о которых рассказывается в «Физике 8». Начнем с импульса.

До столкновения импульс первого шара равен нулю, а импульс второго равен $m_2\vec{v}_2$. Следовательно, общий импульс двух шаров был равен $m_2\vec{v}_2$. После столкновения импульсы обоих шаров изменились и стали равными $m_1\vec{u}_1$ и $m_2\vec{u}_2$ соответственно. Общий импульс теперь равен $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$.

По закону сохранения импульса общий импульс шаров (можно считать, что они образуют замкнутую систему тел) измениться не может. Поэтому мы должны написать

$$m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2.$$

Геометрическое сложение импульсов можно заменить алгебраическим сложением их проекций. Направим координатную ось вдоль линии, соединяющей центры шаров, в направлении скорости

\vec{v}_2 . Тогда для проекций импульсов на эту ось имеем

$$m_2v_{2x} = m_1u_{1x} + m_2u_{2x}.$$

При выбранном направлении оси

$$v_{2x} = v_2, \quad |u_{1x}| = u_1, \quad |u_{2x}| = u_2,$$

но знаки проекций u_{1x} и u_{2x} могут быть как положительными, так и отрицательными.

Из одного этого равенства мы, конечно, не можем найти две неизвестные проекции скоростей u_{1x} и u_{2x} . Необходимо еще одно уравнение.

Будем считать, что сила взаимодействия F шаров при столкновении (рис. 2) — сила упругости (именно в таком случае удар называют упругим). Тогда справедлив закон сохранения механической энергии

$$\frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2},$$

или

$$\frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2u_{2x}^2}{2}.$$

Теперь мы имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} m_2v_2 = m_1u_{1x} + m_2u_{2x}, \\ \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2u_{2x}^2}{2}. \end{cases}$$

из которой можно найти проекции u_{1x} и u_{2x} скоростей шаров после столкновения. Предлагаем читателям самостоятельно решить эту систему и показать, что первый, покоившийся до столкновения шар получит скорость, проекция которой

$$u_{1x} = \frac{2m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

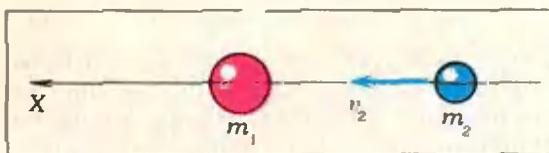


Рис. 1.

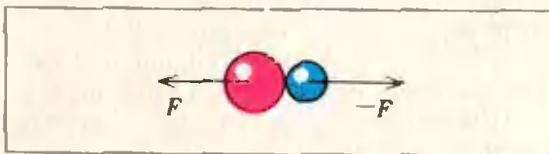


Рис. 2.

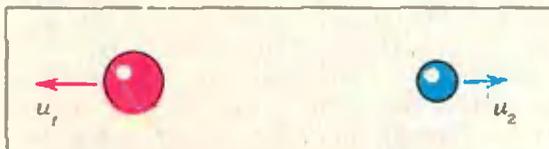


Рис. 3.

а проекция второго шара

$$u_{2x} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2.$$

Легко видеть, что проекция скорости первого шара всегда положительная, а проекция второго может быть как положительной, так и отрицательной. Если масса налетающего шара меньше массы покоящегося ($m_2 < m_1$), то u_{2x} отрицательна. Это означает, что шар после столкновения изменяет направление своей скорости (отскакивает от покоявшегося шара, как показано на рисунке 3). При обратном соотношении масс ($m_2 > m_1$) проекция $u_{2x} > 0$, и направленные движения налетающего шара после столкновения не меняются (отскакивает покоявшийся шар). Если же массы обоих шаров равны ($m_1 = m_2$), то $u_{1x} = v_2$, а $u_{2x} = 0$. Это значит, что второй шар, столкнувшись с первым, передал ему свой импульс, а сам остановился.

Таким образом, пользуясь законами сохранения энергии и импульса, можно, зная скорости тел до столкновения, определить их скорости после столкновения. А как обстояло дело *во время* столкновения, когда шары уже соприкоснулись друг с другом, но еще не разошлись?

При столкновении шары деформируются. Сначала их деформация растет, затем уменьшается. В момент наибольшей деформации шары движутся вместе с одной и той же скоростью. Рассмотрим этот момент подробнее. Обозначим скорость их совместного движения через u и будем считать, для простоты, массы шаров одинаковыми ($m_1 = m_2 = m$). По закону сохранения импульса

$$mv_2 = 2mu_x.$$

Отсюда следует, что $u_x = u = v_2/2$. Таким образом, скорость обоих шаров при их совместном движении равна половине скорости одного из них до столкновения.

Что касается кинетической энергии шаров, то в момент их движения с одной и той же скоростью она равна $2mu^2/2 = mu^2 = mv_2^2/4$. А до столкновения общая энергия шаров была равна $mv_2^2/2$. Следовательно, кинетическая энергия уменьшилась вдвое. Куда же она исчезла? Не происходит ли здесь нарушения закона сохранения энергии, как это может показаться на первый взгляд?

Энергия, конечно же, осталась прежней. Все дело в том, что во время столкновения оба шара были деформи-

рованы, и поэтому они обладали потенциальной энергией упругого взаимодействия. Именно на величину этой потенциальной энергии и уменьшилась кинетическая энергия шаров. Вначале, когда деформация росла, потенциальная энергия увеличивалась и в момент совместного движения шаров она достигла своего максимального значения (в нашем случае равно половине общего запаса энергии). Затем деформация уменьшилась, а запасенная потенциальная энергия перешла обратно в кинетическую.

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

Рассмотрим вначале движение частицы с зарядом q и массой m в однородном постоянном электрическом поле напряженностью \vec{E} . Напряженность поля в этом случае не зависит ни от координат, ни от времени (такое поле возникает, например, в заряженном плоском конденсаторе, отсоединенном от источника). Следовательно, на заряженную частицу со стороны поля действует постоянная сила $\vec{F} = q\vec{E}$, которая сообщает частице постоянное ускорение $\vec{a} = \vec{F}/m = q\vec{E}/m$. Если частица имеет начальную скорость \vec{v}_0 , как показано на рисунке 1, то ее движение в таком поле похоже на движение тела, брошенного под углом к горизонту в однородном поле тяжести, где ускорение тела также постоянно и равно \vec{g} . В учебнике «Физика 8» показано, что траектория движения в таком случае — парабола.

При движении заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле на нее действует сила Лоренца

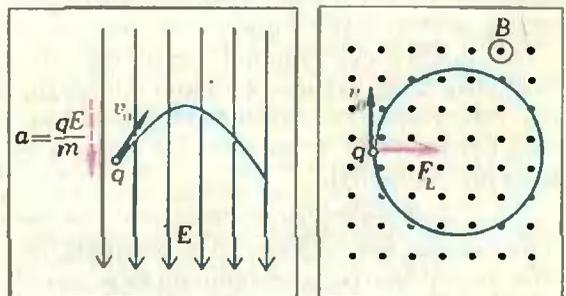


Рис. 1.

Рис. 2.

\vec{F}_L . Если начальная скорость \vec{v}_0 частицы перпендикулярна вектору магнитной индукции \vec{B} поля, то заряженная частица движется по окружности (рис. 2). Этот случай рассмотрен в учебнике «Физика 9».

А что если поместить частицу одновременно в электрическое и магнитное поля? Рассмотрим, например, случай, когда напряженность электрического поля \vec{E} и индукция магнитного поля \vec{B} взаимно перпендикулярны, а поля однородны и постоянны (рис. 3). Предположим, что в начальный момент частица находится в начале координат (положение 1) и ее начальная скорость равна нулю. Под действием электрического поля частица начнет ускоряться, то есть приобретет скорость. Сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля, перпендикулярна скорости частицы и поэтому не совершает работы. Она изменяет только направление скорости (искривляет траекторию частицы), но не меняет ее модуля (об этом рассказано в «Физике 9»). В результате после некоторого момента времени (положение 2) частица начнет двигаться в обратном направлении, и электрическое поле будет тормозить ее. В положении 3 скорость частицы опять обратится в нуль, и далее цикл будет повторяться (см. рис. 3).

Точный расчет (он довольно сложный и выходит за рамки школьного курса физики) показывает, что траектория частицы в этом случае такая же, как у точки колеса, катящегося с постоянной скоростью без проскальзывания по горизонтальной плоскости (рис. 4; соответствующая кривая называется циклоидой). Другими словами, движение частицы можно представить как сложение двух движений — равномерного поступательного движения с постоянной скоростью \vec{v}_d в направлении, перпендикулярном векторам \vec{E} и \vec{B} (ее называют скоростью дрейфа частицы), и вращения вокруг точки O .

Как известно, для описания движения можно пользоваться любой инерциальной системой отсчета. Рассмотрим движение относительно системы отсчета, движущейся со скоростью \vec{v}_d . Относительно этой системы заряженная частица движется по окружности. Вдумайтесь в полученный результат. Мы уже говорили о том, что заряженная частица движется по окружности, когда на

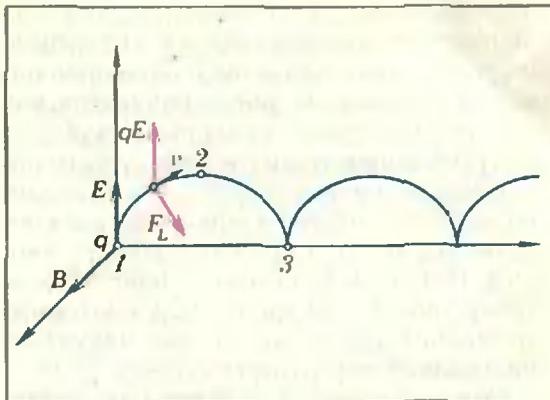


Рис. 3.

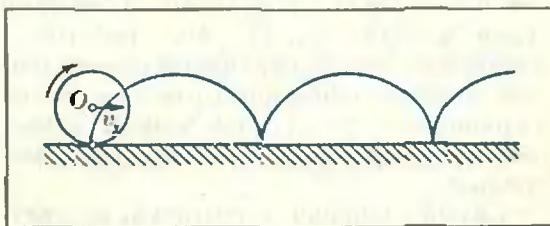


Рис. 4.

нее действует только магнитное поле. Значит, в движущейся системе отсчета электрическое поле исчезает!

В прошлом номере журнала в заметке «Электрическое и магнитное поля» рассказывалось о том, что магнитное поле относительно — его индукция зависит от системы отсчета. Сейчас мы пришли к выводу, что относительно и электрическое поле.

Рентгеновские лучи

В учебнике «Физика 10» рассказывается о том, как были открыты рентгеновские лучи; об их свойствах и практическом применении, а также об устройстве рентгеновской трубки, с помощью которой эти лучи получают. Остановимся подробнее на принципе ее работы.

В том же учебнике раньше говорится о вибраторе Герца и об излучаемых им электромагнитных волнах. Излучение происходит вследствие того, что заряды совершают колебательное движение. При этом амплитуды напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в волне пропорциональны ускорению зарядов. Энергия, излучаемая в единицу времени, пропорциональна квадрату амплитуды и, следовательно, квадрату ускорения. Это — общее правило. Заряд, движущийся с ускорением, всегда излучает электромаг-

нитные волны, интенсивность которых пропорциональна квадрату ускорения.

Этот закон объясняет и излучение электромагнитных волн в рентгеновской трубке. Электроны, пролетая в глубоком вакууме в пространстве между катодом и анодом, разгоняются электрическим полем до больших скоростей, а затем резко тормозятся при соударении с анодом. При этом возникают значительные ускорения, и электроны излучают электромагнитные волны. Такое излучение называется тормозным.

Оказывается, что, тормозясь, электроны излучают целый спектр электромагнитных волн с разными частотами (или длинами волн). Этот спектр — сплошной, но он ограничен определенной максимальной частотой ν_{\max} (такое ограничение по частоте можно объяснить только с точки зрения квантовой теории).

Самая большая частота (и, соответственно, самая малая длина волны) определяется из условия равенства ки-

нетической энергии электрона eU (U — напряжение между анодом и катодом) энергии излучаемого кванта:

$$eU = h\nu_{\max},$$

откуда

$$\nu_{\max} = \frac{eU}{h},$$

и, соответственно, минимальная длина волны

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{ch}{eU},$$

где h — постоянная Планка, а c — скорость света. При разности потенциалов в несколько десятков киловольт минимальная длина волны достигает долей ангстрема ($1\text{ \AA} = 10^{-10}\text{ м}$). Такое коротковолновое излучение обладает большой проникающей способностью и называется рентгеновским излучением.

¹Измерив на опыте минимальную длину волны λ_{\min} и напряжение U , можно из этого равенства определить значение постоянной Планка h . Из таких опытов было получено значение $h = 6,62 \cdot 10^{-34}\text{ Дж}\cdot\text{с}$.

Дифференцирование сложной функции

В. С. ЭППЕЛЬ

Все абитуриенты знают, что $(\sin x)' = \cos x$. Однако равенства вроде $(\sin 2x)' = \cos 2x$ или $(\sin^3 x)' = \cos^3 x$, которыми нет-нет да и грешат абитуриенты, грубо неверны. Дело в том, что функции $\sin 2x$ и $\sin^3 x$ — сложные и дифференцирование их — задача тоже более сложная. Мы покажем здесь, как решать эту задачу практически.

Ошибки вроде $(\sin^3 x)' = \cos^3 x$ возникают тогда, когда поступающие не умеют расшифровать запись $y = \sin^3 x$, не видят в этом простом выражении сложной функции — композиции двух функций (см. «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 20). В действительности, функция $y = \sin^3 x$ получается последовательным выполнением двух операций: взятия синуса угла x и возведения полученного числа $\sin x$ в куб:

$$x \rightarrow \sin x \rightarrow (\sin x)^3.$$

В записи функции $y = \sin^3 x$ нужно су-

меть отдельно увидеть одну за другой две функции (синус и степень), из которых она составлена. Это легче сделать, если эта функция записана в виде

$$y = (\sin x)^3.$$

Для наглядности, на первых порах мы будем помогать читателю распознавать сложные функции с помощью цвета. В нашем примере

$$y = (\sin x)^3 \quad \text{или} \quad y = \sin^3 x$$

В общем случае, чтобы применять правило дифференцирования сложной функции («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 21)

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

необходимо данную функцию суметь «увидеть» в форме $f(g(x))$. Для этого вначале нам будет помогать цвет. Рассмотрим несколько примеров.

Продифференцируем функцию

$$y = \sin 2x = \sin u, \quad u = 2x$$

(каждая функция имеет свой цвет):

$$\begin{aligned} y' &= (\sin u) \cdot (2x)' = (\cos u) \cdot 2 = \\ &= 2 \cos 2x. \end{aligned}$$

(Но не $\cos 2x$.)

Точно так же

$$y = \sin^3 x = u^3, \quad u = \sin x;$$

$$y' = (u^3)' \cdot (\sin x)' = (3u^2) \cdot (\cos x) = \\ = 3 \sin^2 x \cos x.$$

(Но не $\cos^3 x$.)

На практике такое дифференцирование производится гораздо короче и проще, во всяком случае без введения в запись u .

Искусство дифференцирования сложной функции заключается в умении видеть в момент дифференцирования только одну функцию (именно — дифференцируемую в данный момент), не замечая пока другие, — откладывая их видение до момента их дифференцирования.

Вот еще несколько демонстрационных примеров, уже без введения промежуточного « u », так, как обычно осуществляют и записывают дифференцирование сложной функции те, кто обладает свободным навыком такого дифференцирования. Только по-прежнему каждую дифференцируемую функцию и ее производную мы будем писать одинаковым цветом.

$$y = (2x^4 - 5x^2 + 6)^8;$$

$$y' = 8(2x^4 - 5x^2 + 6)^7 \cdot (8x^3 - 10x);$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$y' = \frac{1}{2} (R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Следующая сложная функция —

$$y = \sin^3 5x.$$

она является, как видно хотя бы уже по количеству цветов, композицией трех функций: 1) синус; 2) возведение в степень; 3) умножение на 5.

Продифференцируем ее:

$$y = \sin^3 5x;$$

$$y' = \underbrace{(3 \sin^2 5x)}_{\text{производная степени}} \cdot \underbrace{(\cos 5x)}_{\text{производная синуса}} \cdot \underbrace{(5)}_{(5x)'} = \\ = 15 (\sin^2 5x) \cos 5x.$$

Поскольку от перемены мест множителей произведение не меняется, то и перебирать функции для дифференцирования, само собой разумеется, можно в любом порядке.

Еще несколько примеров:

$$y = \operatorname{tg} x^3; \quad y' = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}.$$

Функцию

мы дифференцируем как произведение функций по формуле $(uv)' = u'v + v'u$:

$$y' = (x^2)' (\ln x^3) + (x^2) \cdot (\ln x^3)' = \\ = 2x \ln x^3 + x^2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (3x^2) = \\ = 2x \ln x^3 + 3x.$$

$$y = 2^{x^3 - 5x};$$

$$y' = \underbrace{2^{x^3 - 5x} \ln 2}_{\text{производная показательной функции}} \cdot \underbrace{(3x^2 - 5)}_{\text{производная многочлена}}$$

У п р а ж н е н и я. Продифференцируйте, используя по мере надобности многоцветную запись:

$$1. y = (x^3 + 2)^4; \quad 2. y = \sqrt{1 + 5x^2};$$

$$3. y = e^{2-3x}; \quad 4. y = \ln(2x^3 - 4x^2);$$

$$5. y = \lg(2x^3 - 4x^2); \quad 6. y = 5^{\sin x};$$

$$7. y = \log_{0.3}(8x^2 - 2x^3);$$

$$8. y = \cos(2x - 1); \quad 9. y = \cos^2 3x;$$

$$10. y = \sqrt{\operatorname{tg} x}; \quad 11. y = x \operatorname{tg}^2 x;$$

$$12. y = \sin \sqrt{ax}; \quad 13. y = \ln \sin x;$$

$$14. y = 3^{\frac{1}{x}}; \quad 15. y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

16. Докажите, что функция $y = c\sqrt{1+x^2}$ служит решением дифференциального уравнения $y' = xy/(1+x^2)$.

Поправки

1) В «Кванте» № 1 на с. 57 во втором уравнении задачи 1 варианта 1 ошибочно напечатано 15 вместо 55.

2) В последнем абзаце на с. 47 «Кванта» № 2 над 1-й, 4-й, 7-й жирными буквами А и 1-й, 3-й, 5-й, 6-й, 8-й жирными буквами В должна стоять черта (А, В), пропущенная по вине типографии.

Избранные школьные задачи

Под этим заголовком в разделе «Школа в Кванте» будут регулярно публиковаться задачи по математике, тесно связанные со школьным курсом. В отличие от «Задачника Кванта», здесь мы будем помещать довольно известные задачи — «школьную математическую классику». Их решения (как правило, короткие, но не всегда очевидные!) будут публиковаться в конце того же номера журнала. Систематически разбирая эти задачи, вы познакомитесь со многими полезными приемами, которые пригодятся вам на школьных контрольных и экзаменах, при поступлении в вуз или на олимпиаде. Мы надеемся, что «Избранные школьные задачи» окажутся интересными и для учителей, а также для тех студентов, которые готовятся стать ими.

Восьмой класс

1. Разложите на множители выражения:

а) $a^4 + 4b^4$; б) $a^4 + b^4$.

2. Докажите, что в трапеции 4 точки — середины оснований, точка пересечений диагоналей и точки пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

3. а) Пусть на плоскости заданы две параллельные прямые и отрезок AB на одной из них. Постройте середину отрезка AB с помощью одной линейки.

б) Пусть на плоскости заданы отрезок AB и точка M вне прямой AB , а также отмечена середина C отрезка AB . Постройте прямую, проходящую через точку M , параллельную прямой AB , с помощью одной линейки.

4. Какую фигуру задает на координатной плоскости неравенство $|x| + |y| < 1$?

5. Три экскаватора должны выкопать траншею. Сначала первый из них работал столько времени, сколько понадобилось бы второму и третьему экскаваторам, чтобы вырыть половину траншеи. Затем второй из них проработал столько времени, сколько понадобилось бы первому и третьему экскаваторам, чтобы вырыть половину траншеи. Наконец после этого третий экскаватор проработал столько времени, сколько понадобилось бы первому и второму экскаваторам, чтобы вырыть половину траншеи. В результате этой работы экскаваторы вырыли всю траншею. Во сколько раз быстрее они вырыли бы траншею, работая все вместе, а не поодиночке?

Девятый класс

6. Пусть $a + 4b = 2$. Какое наибольшее значение может принимать произведение ab ?

7. Задача о честном купце. Один честный купец заметил, что на весах, которыми он пользуется, одно плечо коромысла немного длиннее другого (в то время пользовались весами с двумя чашками на коромысле). Что делать? Обвешивать покупателей — грех, но и себя обижать не хочется! В это время в лавку зашел покупатель и попросил взвесить ему два фунта орехов. «Взвешу-ка я орехи в два приема», — подумал купец. «Сначала поставлю фунтовую гирию на левую чашку весов и насыплю на правую столько орехов, чтобы весы уравновесились. Отдав эти орехи покупателю, я затем поставлю ту же фунтовую гирию на правую чашку весов, а на левую насыплю столько орехов, чтобы весы сно-

ва уравновесились, и отдам их покупателю». Сказано — сделано. Удалось ли купцу осуществить свои честные намерения или кто-то остался в проигрыше?

8. Пусть функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = (x^2 + 5x - 8)^{100} \cdot x^5. \quad (1)$$

Если произвести все указанные в правой части формулы (1) действия и привести подобные члены, то функция $f(x)$ запишется в виде многочлена:

$$f(x) = a_0 x^{205} + a_1 x^{204} + a_2 x^{203} + \dots + a_{204} x + a_{205}, \quad (2)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{205}$ — некоторые числа (коэффициенты многочлена).

а) Найдите сумму всех коэффициентов

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{204} + a_{205}$$

указанного многочлена.

б) Найдите сумму коэффициентов

$$S_H = a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{204}$$

указанного многочлена, стоящих при нечетных степенях x .

в) Найдите сумму коэффициентов

$$S_4 = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{205}$$

9. Докажите, что любую функцию $f(x)$, определенную на всей числовой оси, можно представить как сумму четной и нечетной функций.

10. Пусть в тетраэдре (произвольной треугольной пирамиде) высота, проведенная из вершины, проходит через точку пересечения высот треугольника, расположенного в основании. Докажите, что:

а) скрещивающиеся ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны;

б) остальные высоты тетраэдра также проходят через точки пересечения высот соответствующих граней;

в) все четыре высоты тетраэдра пересекаются в одной точке;

г) суммы квадратов длин каждой пары скрещивающихся ребер одинаковы.

Десятый класс

11. а) Докажите, что $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

б) Докажите, что $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

12. Какую фигуру задает в координатном пространстве неравенство $|x| + |y| + |z| < 1$?

13. Решите уравнения:

а) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^x = 2$;

б) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^x = 2^x$.

14. Упростите выражения:

а) $\log_a \lg 1^\circ + \log_a \lg 2^\circ + \dots + \log_a \lg 88^\circ + \log_a \lg 89^\circ$;

б) $\log_a \sin 60^\circ \cdot \log_a \sin 61^\circ \times \dots \times \log_a \sin 119^\circ \cdot \log_a \sin 120^\circ$;

в) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \times \dots \times \log_{(n-2)} (n-1) \cdot \log_{(n-1)} n$.

15. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри или на границе правильного тетраэдра, до его граней равна высоте тетраэдра.

Публикацию подготовил Ж. М. Работ

Задачи

1. При каком соотношении радиусов шестеренок будет вращаться система, изображенная на верхнем рисунке? А система на следующем рисунке?

2. Решите числовой ребус:

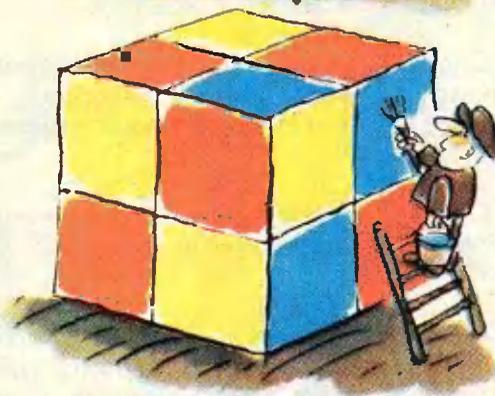
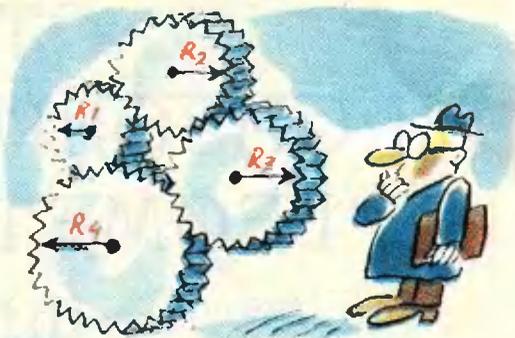
$$\begin{array}{r} \text{ВАГОН} \\ + \text{ВАГОН} \\ \hline \text{СОСТАВ} \end{array}$$

3. Каждая грань кубика разделена на 4 квадрата и каждый квадратик окрашен в один из трех цветов: синий, желтый или красный так, что квадратик, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Сколько при этом может быть синих, красных и желтых квадратиков?

4. Рассмотрим некоторое двузначное число, например 13. Умножим это число на 20 и сложим его с исходным числом — получится число 273. Умножим полученное число на 481 — получится число 131 313, в записи которого трижды повторяется исходное число 13. Это удивительное свойство выполняется для любого двузначного числа. Почему?

5. На электронных часах высвечивается время: часы и минуты. Сколько времени в сутки высвечивается хотя бы в одном месте цифра 2? Найдите соответствующее время для остальных цифр: 0, 1, 3, 4, ..., 9.

Эти задачи нам предложили: И. В. Молодчик,
С. Н. Олехник, В. В. Произолов,
А. П. Савин, В. П. Чичин.



ОТКУДА ПРОИЗОШЛИ НАЗВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР?

Доктор физико-математических наук
Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

Почти все названия геометрических фигур греческого происхождения, как и само слово геометрия, происходящее от греческого слова γεωμετρία (геометрия) — землемерие. Однако эти слова вошли в русский язык не непосредственно с греческого, а через латинский язык.

Слово **цилиндр** происходит от латинского слова *cylindrus* (цилиндрус), являющегося латинской формой греческого слова *κύλινδρος* (кюлиндрос), означающего валик, каток.

Слово **призма** — латинская форма греческого слова *πρίσμα* (присма) — опиленная (имелось в виду опиленное бревно).

Слово **сфера** — латинская форма греческого слова *σφαῖρα* (сфайра) — мяч.

Слово **пирамида** — латинская форма греческого слова *πυράμις* (пюрамис), которым греки называли египетские пирамиды; это слово происходит от древнеегипетского слова «пурама», которым эти пирамиды называли сами египтяне. Современные египтяне называют пирамиды словом «ахрам», которое также происходит от этого древнеегипетского слова.

Слово **трапеция** происходит от латинского слова *trapezium* (трапезиум) — латинской формы греческого слова *τραπεζίου* (трапезион) — столик.

От этого же корня происходит наше слово «трапеза», означающее по-гречески стол.

Слово **ромб** происходит от латинского слова *rombus* (ромбус) — латинской формы греческого слова *ῥόμβος* (ромбос), означающего бубен. Мы привыкли к тому, что бубен имеет круглую форму, но раньше бубны имели форму квадрата или ромба, о чем свидетельствуют изображения «бубен» на игральных картах.

Непосредственно с латинского языка мы заимствовали слово **пункт**, употребляющийся иногда в значении «точка» (отсюда «пунктир»), и слово **линия**.

Слово **пункт** происходит от латинского слова *punctum* (пунктум) — укол; от этого же корня происходит медицинский термин «пункция» — прокол.

Слово **линия** происходит от латинского слова *linea* (линеа) — льняная (имеется в виду льняная нить). От этого же корня происходит наше слово «линолеум», первоначально означавшее промасленное льняное полотно.

Таким образом, все названия геометрических фигур первоначально были названием конкретных предметов, имеющих форму, более или менее близкую к форме данной фигуры.

Статья перепечатывается из «Кванта» № 1 за 1970 год.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



задачник Кванта

Задачи

М856—М860; Ф868—Ф872

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 июня 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М856, М857» или «Ф868». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Внимание!

Задачу М846 следует решать в более общей формулировке: *докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин его диагоналей.*

Срок отправки ее решений продлевается до 30 июня.

М856. а) Постройте четырехугольник, зная длины его сторон и длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

б) При каких условиях задача имеет решение?

И. З. Титович

М857. Среди 1984 первых натуральных чисел (от 1 до 1984) отметим те, которые можно представить в виде суммы пяти целых неотрицательных степеней двойки (то есть пяти не обязательно различных чисел 1, 2, 4, 8, ...). Каких чисел окажется больше: отмеченных или не отмеченных?

С. Стадниченко

М858. Для величин α , β и γ углов некоторого треугольника выполнено соотношение

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin \gamma.$$

а) Найдите α , β , γ , если известно, что треугольник равнобедренный (рассмотрите все случаи).

б) Может ли треугольник быть остроугольным?

в)* Какие значения может принимать наибольший угол треугольника?

П. Б. Гусятников

М859. Найдите наименьшее положительное число a такое, что для любого квадратного трехчлена $f(x)$, удовлетворяющего при $0 < x < 1$ неравенству $|f(x)| < 1$, выполняется неравенство $|f'(1)| < a$.

В. П. Пикулин

М860.* а) Пусть O и R — центр и радиус описанной окружности треугольника ABC , Z и r — центр и радиус его вписанной окружности, K — точка пересечения медиан треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC . Докажите, что точка Z лежит на отрезке OK , причем $|OZ| : |ZK| = 3R/r$.

б) Пусть a , b , c — длины сторон треугольника ABC , \vec{n}_a , \vec{n}_b , \vec{n}_c — единичные векторы, перпендикулярные к соответствующим сторонам треугольника и направленные во внешнюю сторону (рис. 1). Докажите, что

$$a^3 \vec{n}_a + b^3 \vec{n}_b + c^3 \vec{n}_c = 12S \cdot \vec{MO},$$

где S — площадь треугольника ABC , M — точка пересечения его медиан. O — центр описанной окружности.

Чан Куанг

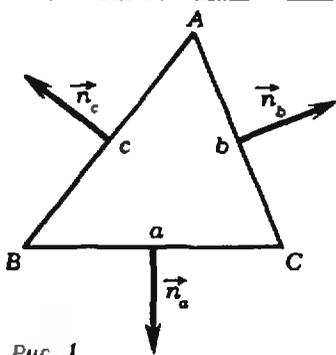


Рис. 1.

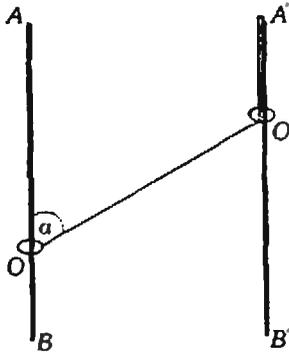


Рис. 2.

Ф868. Колечки O и O' надеты на вертикально закрепленные стержни AB и $A'B'$. Нерастяжимая нить привязана к кольцу O , пропущена через кольцо O' и закреплена в точке A' (рис. 2). В тот момент, когда $\angle AOO' = \alpha$, кольцо O' движется вниз со скоростью v . Найти скорость кольца O в этот момент.

С. С. Кротов

Ф869. Вертикальная длинная кирпичная труба заполнена чугуном. Нижний конец трубы поддерживается при температуре $T_1 > T_{пл}$ ($T_{пл}$ — температура плавления чугуна), верхний — при температуре $T_2 < T_{пл}$. Теплопроводность у расплавленного чугуна в k раз больше, чем у твердого. Какая часть металла находится в расплавленном состоянии?

А. И. Буздин

Ф870*. Одноатомный идеальный газ расширяется так, что его молярная теплоемкость c_x остается постоянной; при этом газ совершает работу $A = -165$ Дж. Затем газ изохорически нагревают до первоначальной температуры, для чего к нему подводят количество теплоты $Q = 125$ Дж. Определить c_x .

А. А. Шеронов

Ф871. Первоначально незаряженный конденсатор емкости C подключают к последовательно соединенным батарее с напряжением U_0 и катушке с индуктивностью L . Ток через катушку вначале увеличивается, а затем уменьшается. В тот момент, когда ток становится равным нулю, конденсатор отключают от схемы и подключают вновь, поменяв местами его выводы. Какой максимальный ток будет после этого течь через катушку? Как изменится этот ток, если процесс переключения повторить 1984 раза? Сопротивлением цепи пренебречь.

А. Р. Зильберман

Ф872. Длинные сани, скользящие по очень гладкому льду, въезжают на асфальт и останавливаются, не пройдя половины своей длины. После этого саням резким толчком сообщают первоначальную скорость, и они вновь останавливаются. Как относятся времена торможения в первом и во втором случаях? Как относятся пути торможения?

С. С. Кротов

Problems

M856—M860; P868—P872

M856. a) Construct a quadrilateral knowing the lengths of its sides and that of the segment joining the midpoints of the diagonals.

b) Under what conditions does the problem have a solution?

I. Z. Titovitch

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The

more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 30th, 1984, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Please send the solutions of problems in physics and mathematics, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

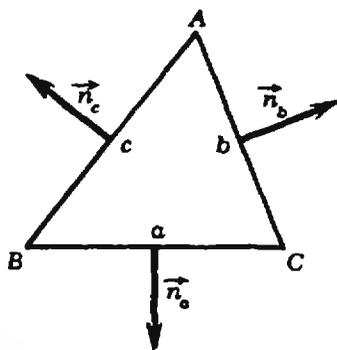


Рис. 1.

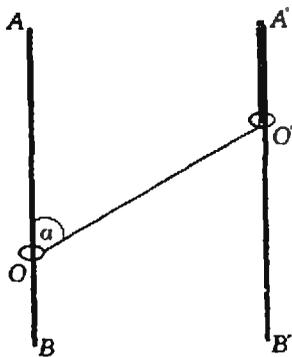


Рис. 2.

M857. Among the first 1984 positive integers (from 1 to 1984) we underline those which may be represented as the sum of five non-negative integer powers of 2 (i. e. of five not necessarily different numbers 1, 2, 4, 8, ...). Is the set of underlined numbers larger than that of the non-underlined ones?

S. Stadnichenko

M858. The angles α , β and γ of a triangle satisfy the relation

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma.$$

- a) Find α , β , γ if the triangle is isosceles (consider all possible cases).
- b) Can the triangle have only acute angles?
- c)* What values can the largest angle of the triangle assume?

P. B. Gusyatinikov

M859. Find the least positive number a such that any quadratic trinomial $f(x)$ for which $|f(x)| < 1$ whenever $0 < x < 1$ satisfies $|f'(1)| < a$.

V. P. Pikulin

M860. a) Let R and O be the radius and centre of the circumcircle of triangle ABC , r and Z the radius and centre of its incircle, K the common point of the medians of the triangle whose vertices are the points where the incircle touches the sides of ABC . Prove that Z lies on the segment OK and $|OZ| : |ZK| = 3R/r$. b) Let a, b, c be the lengths of the sides of triangle ABC , $\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c$ unit vectors perpendicular to the corresponding sides of the triangle and directed outward (see figure Рис. 1). Prove that

$$a^3 \vec{n}_a + b^3 \vec{n}_b + c^3 \vec{n}_c = 12S \cdot \vec{MO}$$

where S is the area of triangle ABC , M the intersection point of its medians and O the centre of the circumcircle.

Chan Quang

P868. Little rings O and O' are slipped on two vertical rods AB and $A'B'$. An unstretchable string is tied to the ring O , slides through the ring O' and fixed at the point A' (see figure Рис. 2). At the moment when $\angle AOO' = \alpha$, the ring O' moves down with velocity v . Find the velocity of the ring O at that moment.

S. S. Krotov

P869. A long vertical brick furnace is filled with pig iron. The temperature of the lower part of the furnace is maintained at $T_1 > T_m$ (where T_m is the melting temperature of pig iron), the upper part — at $T_2 < T_m$. The heat conductivity of melted pig iron is k times that of solid pig iron. What part of the metal is in melted state?

A. I. Buzdin

P870*. A monoatomic ideal gas expands so that its molar specific heat c_v remains constant; the gas produces the work $A = 165\text{J}$. Then the gas is

isochorically heated to its initial temperature, which requires the amount of heat $Q=125$ J. Determine c_x .

A. A. Sheronov

P871. An initially uncharged capacitor of capacity C is connected consecutively to a battery of EMF of tension U_0 and a coil of inductivity L . The current in the coil first increases, then decreases. At the moment when the current banishes, the capacitor is disconnected and then reconnected with the ends interchanged.

What maximal current will then flow through the coil. How will the current change if the reconnection process is repeated 1984 times? The circuit's resistance is negligible.

A. R. Zilberman

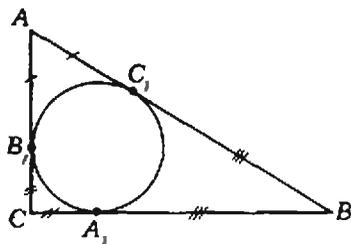
P872. A long sled, sliding on very slippery ice, reaches an ice-free section of the road and stops before travelling half its length. Then a sharp push restores the sled's previous velocity, and it stops again. What is the relationship between 1) the slowing down times in the first and second cases? 2) the distances travelled while slowing down?

S. S. Krotov

Решения задач

M841 — M845; Ф852 — Ф857

M841. Докажите, что произведение длин отрезков, на которые гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной в него окружности, равно площади этого треугольника.



Эта простая задача имеет несколько решений. Приведем только одно из них. Пусть a и b — длины катетов, c — длина гипотенузы данного треугольника ABC ; A_1 , B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами (см. рисунок). По теореме о равенстве касательных, проведенных к окружности из одной точки, $|AB_1| = |AC_1|$, $|BC_1| = |BA_1|$ и $|CA_1| = |CB_1|$. Отсюда следует, что

$$|AC_1| = \frac{c+b-a}{2}, \quad |BC_1| = \frac{c+a-b}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |AC_1| \cdot |BC_1| &= \frac{1}{4} (c+b-a)(c-(b-a)) = \frac{1}{4} (c^2 - (b-a)^2) = \\ &= \frac{1}{4} (c^2 - b^2 - a^2 + 2ab) = \frac{ab}{2} = S_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

(мы воспользовались теоремой Пифагора).

В случае произвольного треугольника ABC аналогичная выкладка приводит к такой формуле:

$$S_{\triangle ABC} = |AC_1| \cdot |BC_1| \cdot \operatorname{ctg}(\hat{C}/2).$$

В. Н. Дубровский

M842. а) Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = 0$, то

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma =$$

$$= -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

б) Величины \hat{A} , \hat{B} и \hat{C} углов треугольника удовлетворяют

◆ Это довольно известное утверждение — подсказка к пункту б); оно легко доказывается с помощью стандартных формул преобразования суммы синусов и разности косинусов в произведение:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \right) =$$

условию

$$\frac{\sin \bar{A} + \sin \bar{B} + \sin \bar{C}}{\cos \bar{A} + \cos \bar{B} + \cos \bar{C}} = \sqrt{3}$$

Докажите, что хотя бы один из них равен 60° .

$$= 4 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \beta - \gamma}{4} \sin \frac{\alpha + \gamma - \beta}{4} = -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

(в последнем переходе использовано условие $\alpha + \beta + \gamma = 0$).

б) Так как $\sqrt{3} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$, условие можно переписать так:

$$\sin \bar{A} \cos 60^\circ - \cos \bar{A} \sin 60^\circ + \sin \bar{B} \cos 60^\circ - \cos \bar{B} \sin 60^\circ + \sin \bar{C} \cos 60^\circ - \cos \bar{C} \sin 60^\circ = 0$$

или

$$\sin (\bar{A} - 60^\circ) + \sin (\bar{B} - 60^\circ) + \sin (\bar{C} - 60^\circ) = 0$$

Применяя к углам $\bar{A} - 60^\circ$, $\bar{B} - 60^\circ$ и $\bar{C} - 60^\circ$ утверждение пункта а), получим, что

$$\sin \frac{\bar{A} - 60^\circ}{2} \cdot \sin \frac{\bar{B} - 60^\circ}{2} \cdot \sin \frac{\bar{C} - 60^\circ}{2} = 0$$

то есть хотя бы один из углов \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} равен 60° .

Л. Д. Курляндчик

M843. В вершинах треугольника ABC восстановлены перпендикуляры AA_1 , BB_1 и CC_1 к его плоскости по одну сторону от нее, равные по длине соответствующим высотам треугольника. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки пересечения плоскостей ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 на плоскость ABC , попадает в центр вписанной в треугольник ABC окружности и равен по длине ее радиусу.

Пусть Q — точка пересечения плоскостей ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 . O — ее проекция на плоскость ABC , P — проекция O на одну из сторон треугольника, для определенности — на прямую BC . Очевидно, что треугольник QOP подобен треугольнику A_1AH , где AH — высота треугольника ABC (см. рис. 1). Следовательно, $|OP| : |OQ| = |AH| : |AA_1| = 1$, то есть $|OP| = |OQ|$. Аналогично доказывается, что расстояния от точки O до прямых AB и AC тоже равны $|OQ|$. Но это и значит, что O — центр вписанной окружности, а $|OQ|$ — ее радиус.

Приведем общее соотношение между расстоянием d от точки Q до плоскости ABC и длинами a , b и c отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 :

$$\frac{d}{a} + \frac{d}{b} + \frac{d}{c} = 1 \text{ или } d = \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

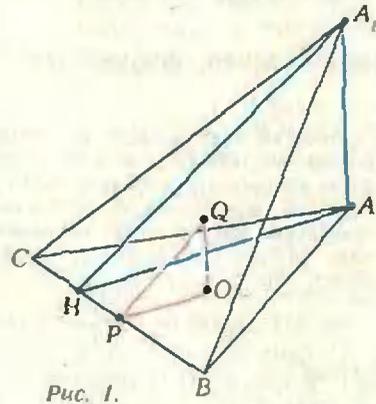
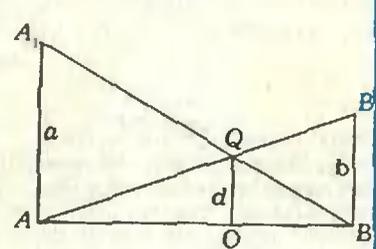


Рис. 1.



$$\frac{d}{a} + \frac{d}{b} = \frac{|OB|}{|AB|} + \frac{|AO|}{|AB|} = 1$$

Рис. 2.

Докажите его самостоятельно и проверьте, что если a , b и c — длины высот треугольника, то d — радиус его вписанной окружности. Рис. 2 иллюстрирует доказательство аналогичного соотношения в двумерном случае.

В. И. Дубровский,
А. А. Ягубьянц

M844. а) Докажите, что любое натуральное число a можно единственным образом представить в виде

$$a = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \dots + a_n \cdot n!, \quad (1)$$

где a_k — целые числа, $0 < a_k \leq k$, $a_n \neq 0$. (По определению, $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$, $1! = 1$.)

б)* Докажите, что любое рациональное число r , $0 < r < 1$, можно единственным образом

а) Покажем, как по данному числу a найти старший коэффициент a_n в представлении

$$a = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \dots + a_{n-1} \cdot (n-1)! + a_n \cdot n! \quad (*)$$

где $0 < a_k \leq k$, $a_n \neq 0$, и его номер n .

Из первого тождества на полях (см. с. 37) следует, что при указанных значениях коэффициентов a_k

$$a' = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \dots + a_{n-1} \cdot (n-1)! < 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + (n-1) \cdot (n-1)! < n!$$

кроме того, $n! < a_n \cdot n! < n \cdot n!$. Для каждого натурального a можно найти единственное n такое, что a лежит в промежутке $n! < a < (n+1)!$; этим однозначно определяется n в представле-

представить в виде

$$r = \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} + \dots + \frac{b_n}{(n+1)!} \quad (2)$$

где b_k — целые числа, $0 < b_k < k$, $b_n \neq 0$.

а) Представьте в виде (1) число $a = 1984$ и в виде (2) число $r = 19/84$.

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = \\ = (2! - 1!) + (3! - 2!) + \dots + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1$$

нии (*). Разбив этот промежуток на n промежутков (длиной $n!$ каждый), мы найдем единственное возможное значение a_n как номер того промежутка, куда попадет a : $a_n \cdot n! < a < (a_n + 1)n!$; другими словами, a_n — неполное частное от деления a на $n!$: $a = a_n \cdot n! + a'$, где $0 < a' < n!$ ($a_n = [a/n!]$, где $[x]$ — целая часть x).

Точно так же мы можем найти для a' старший коэффициент в представлении

$$a' = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \dots + a_{n-1} \cdot (n-1)!$$

и т. д. Формальное доказательство существования и единственности требуемого представления (*) можно провести методом математической индукции: для $a = 1$ утверждение очевидно, а наше рассуждение показывает, как из предположения, что оно верно для чисел, меньших a , следует его справедливость для данного a .

Можно двигаться и в обратном направлении: сначала найти a_1 , потом a_2 и т. д. При этом a_1 есть остаток от деления a на 2, a_2 — остаток от деления $(a - a_1 \cdot 1!)/2$ на 3 и, вообще, a_k — остаток от деления $(a - a_1 \cdot 1! - \dots - a_{k-1} \cdot (k-1)!)/k!$ на $k+1$.

Оба эти способа позволяют вывести такую общую формулу для a_k :

$$a_k = [a/k!] - [a/(k+1)](k+1).$$

б) Будем последовательно разбивать отрезок $[0; 1]$ на 1-м шагу — на 2 равные части, на 2-м шагу каждый из двух образовавшихся отрезков — на 3 равные части и т. д. Вообще, на k -м шагу каждый из отрезков, полученных на $(k-1)$ -м шагу, разбивается на $k+1$ равных частей. Ясно, что после k -го шага отрезок $[0; 1]$ будет разбит на $(k+1)!$ равных частей.

Рассмотрим точку разбиения r , появившуюся впервые на n -м шагу (очевидно, $r = m/(n+1)!$, где m не делится на $n+1$). Эта точка отстоит от ближайшей к ней слева точки $(n-1)$ -го шага на величину $b_n/(n+1)!$, где b_n — целое число, $0 < b_n < n$. В свою очередь, эта точка $(n-1)$ -го шага отстоит от ближайшей слева точки $(n-2)$ -го шага на $b_{n-1}/n!$, где $0 < b_{n-1} < n-1$, и т. д. В итоге получим представление

$$r = \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} + \dots + \frac{b_n}{(n+1)!}, \quad 0 < b_k < k, \quad b_n \neq 0. \quad (**)$$

Его единственность следует из того, что при любом наборе b_1, \dots, b_n в (***) числа

$$\frac{b_1}{2!} \cdot \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} \cdot \dots \cdot \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} + \dots + \frac{b_n}{(n+1)!}$$

получаются, соответственно, не позже чем на 1-м, 2-м, ..., n -м шагах разбиения, причем (в силу неравенств $0 < b_k < k$) каждое из них является ближайшим слева к следующему среди всех чисел того же шага.

Остается заметить, что любое рациональное число $r = p/q$ из промежутка $[0; 1]$ появится среди точек разбиения не позже чем на $(q-1)$ -м шагу, так как $r = p(q-1)!/q!$.

Фактически в этом решении коэффициенты b_1, \dots, b_n определяются последовательно начиная с b_n : если уже найдены b_n, \dots, b_k , то b_{k-1} — это остаток от деления (целого!) числа

$$\left(r - \frac{b_n}{(n+1)!} - \dots - \frac{b_k}{(k+1)!} \right) \cdot k! \text{ на } k.$$

Подумайте, как можно находить эти коэффициенты начиная с b_1 . Проверьте справедливость следующей формулы:

$$b_k = [r \cdot (k+1)!] - [r \cdot k!](k+1)$$

(можно использовать второе тождество на полях).

в) Ответ: $1984 = 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 4! + 4 \cdot 5! + 2 \cdot 6!$, $19/84 = -1/3! + 1/4! + 2/5! + 6/7!$. Эти представления легко найти, опираясь на решения пунктов а) и б).

В. Е. Колосов

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n-1}{n!} + \dots + \frac{k!}{(k+1)!} = \\ = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

М845. Для каких n из n уголков, состоящих из четырех клеток 1×1 и некоторого числа прямоугольников 4×1 (рис. 1), можно составить centrally-симметричную фигуру (многоугольник на клетчатой бумаге)?

♦ Ответ: для любого четного n .

На рисунке 2 показано, как из любого четного числа n уголков составить centrally-симметричную фигуру (прямоугольник $4 \times n$). Покажем, что и обратно, любая centrally-симметричная фигура Φ из условия может содержать лишь четное число уголков. Приведем два доказательства.

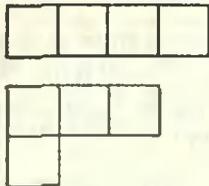


Рис. 1.

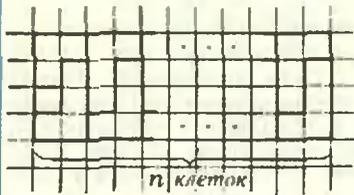


Рис. 2.

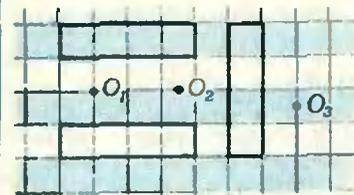


Рис. 3а.

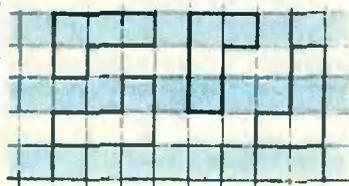


Рис. 3б.



Рис. 4.

Первое основано на традиционных «олимпиадных» идеях — раскраски и четности. Центр симметрии O фигуры Φ — это один из центров симметрии соответствующей квадратной сетки, то есть либо ее узел, либо середина отрезка между двумя соседними узлами, либо центр клетки. Последний случай можно сразу отбросить, так как в этом случае число клеток в фигуре было бы нечетно, но оно должно делиться на 4. Покрасим плоскость «в синюю полоску», как показано на рисунке 3. Тогда число синих клеток в фигуре Φ будет четно. (В зависимости от расположения центра O либо каждой синей клетке симметрична белая — как для центров O_1 и O_2 на рисунке 3, а, и тогда число синих клеток в Φ равно половине общего числа клеток, кратного четырем; либо каждой синей клетке симметрична другая синяя — как для точки O_3 на рисунке 3, а.) Но в любом прямоугольнике 4×1 на сетке число синих клеток четно (рис. 3, а), а в любом уголке — нечетно (рис. 3, б). Поэтому число уголков должно быть четно.

Второе доказательство опирается на то, что центр симметрии O фигуры Φ является и ее центром масс (если рассматривать ее как однородную пластину; можно также заменить Φ на конечную систему равных масс, сосредоточенных в центрах составляющих эту фигуру клеток). Как мы видели выше, через точку O проходит хотя бы одна из линий сетки; примем ее за ось ординат, а за ось абсцисс — любую перпендикулярную линию сетки. Единицей длины будет служить сторона клетки. В этих осях координаты точки O , а также центры масс любого прямоугольника 4×1 будут целыми или полуцелыми, то есть числами вида $a/2$, где a — целое. Центр масс уголка лежит в середине отрезка, соединяющего центры двух прямоугольников 2×1 , из которых он составлен (рис. 4), поэтому его координаты имеют вид $b \pm 1/4$ (b — целое число). Воспользуемся теперь тем, что если заменить каждую из фигурок — прямоугольников и уголков, составляющих Φ , на ее центр масс и поместить в эти центры равные массы, то центр полученной новой системы также попадает в точку O . Это означает, что координаты точки O равны средним арифметическим соответствующих координат центров масс всех фигурок, составляющих Φ . Следовательно, сумма абсцисс этих центров, то есть сумма нескольких чисел вида $a/2$ и n чисел вида $b \pm 1/4$, должна быть равной нулю. Но это, очевидно, возможно только при четном n .

Чтобы второе доказательство стало вполне строгим, надо еще дать точное математическое определение центра масс и доказать использованные нами его свойства, например, законность замены какой-то группы масс на ее центр. Об этом подробно рассказывается в статье М. Б. Балка и В. Г. Болтянского в этом номере журнала.

В. Г. Белов

Ф852. По горизонтальной непроводящей плоскости без проскальзывания катится равномерно заряженное кольцо массы m . После включения горизонтального магнитного поля с индукцией \vec{B} , перпендикулярной плоскости кольца, сила давления кольца на плоскость уменьшилась вдвое. С какой скоростью катилось кольцо, если его заряд равен q ?

◆ Изменение силы давления кольца на плоскость обусловлено действием на кольцо некоторой силы со стороны магнитного поля. Найдем эту силу.

Рассмотрим два малых диаметрально противоположных участка кольца вблизи точек A и C (см. рисунок). Поскольку точка O — мгновенный центр вращения кольца, мгновенные скорости точек A и C равны, соответственно,

$$v_A = \frac{v}{R} |OA| = \frac{v}{R} 2R \cos \frac{\alpha}{2} = 2v \cos \frac{\alpha}{2}.$$

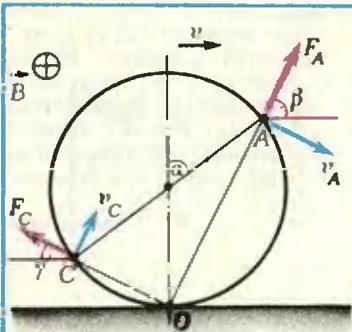
$$v_C = \frac{v}{R} |OC| = 2v \sin \frac{\alpha}{2},$$

где R — радиус кольца. Векторы \vec{v}_A и \vec{v}_C перпендикулярны, соответственно, отрезкам OA и OC . Пусть заряд каждого участка равен Δq . Поскольку участки малы, эти заряды можно считать точечными. Силы Лоренца, действующие со стороны магнитного поля на каждый заряд, равны

$$F_A = \Delta q \cdot B 2v \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$F_C = \Delta q \cdot B 2v \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Векторы \vec{F}_A и \vec{F}_C направлены вдоль отрезков OA и OC и состав-



ляют с горизонталью углы, равные, соответственно.

$$\beta = \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi - \alpha}{2} \right) = \frac{\alpha}{2}$$

В проекции на горизонталь результирующая сила, действующая на оба участка, равна

$$\int_x = \Delta q \cdot 2Bv \left(\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 0,$$

а в проекции на вертикаль

$$\int_y = \Delta q \cdot 2Bv \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \Delta q \cdot 2Bv.$$

Рассматривая аналогично каждую пару диаметрально противоположных участков, найдем, что горизонтальная проекция силы, действующей на кольцо со стороны магнитного поля, равна нулю, а вертикальная проекция равна

$$F_y = \sum_i F_{yi} = 2vB \sum_i \Delta q_i,$$

где $\sum_i \Delta q_i$ — сумма зарядов всех элементарных участков, составляющих половину кольца, то есть $\sum_i \Delta q_i = \frac{q}{2}$. Таким образом,

$$F_y = qvB.$$

Запишем условие равновесия кольца в проекции на вертикаль:

$$mg = N + qvB.$$

По условию задачи $N = mg/2$ и, следовательно,

$$qvB = mg/2.$$

Отсюда

$$v = mg/2qB.$$

Л. Г. Маркович

Ф853. Левые опоры контейнера, в отличие от правых, сделаны на роликах (рис. 1), обеспечивающих пренебрежимо малое трение (размеры опор малы). Чтобы сдвинуть контейнер влево, к центру его правой стенки перпендикулярно ей надо приложить силу F_1 . Чтобы сдвинуть контейнер вправо, к центру его левой стенки перпендикулярно ей надо приложить силу F_2 . Определить массу контейнера, считая его однородным кубом.

◆ При приложении к центру правой стенки силы F_1 контейнер сдвинется, когда эта сила сравняется с силой трения $\mu N_1'$, действующей на неподвижные опоры. Так что сила давления пола на эти опоры —

$$N_1 = F_1/\mu.$$

Суммарный момент сил относительно оси, проходящей через ролики, должен быть равен нулю (контейнер не опрокидывается). Поэтому (см. рис. 1)

$$\frac{mgl}{2} - \frac{F_1 l}{2} - N_1 l = 0.$$

Отсюда, с учетом того, что $N_1 = F_1/\mu$, получаем:

$$mg = F_1 \left(1 + \frac{2}{\mu} \right). \tag{1}$$

При приложении силы F_2 к центру левой грани (рис. 2) сила давления пола на неподвижные опоры равна F_2/μ . Равенство нулю полного момента сил относительно оси, проходящей через ролики, приводит к соотношению

$$mg = F_2 \left(\frac{2}{\mu} - 1 \right). \tag{2}$$

($F_2 > F_1$, потому что во втором случае момент силы F_2 приводит к дополнительной нагрузке на неподвижные опоры, а значит, и к возрастанию силы трения.)

Решая совместно (1) и (2), находим m :

$$m = \frac{2F_1 F_2}{g(F_2 - F_1)}.$$

У некоторых холодильников конструкция опор такая же, как и у нашего контейнера. Они легко передвигаются в сторону роликов и значительно труднее в противоположную сторону. Иногда холодильник вообще не ждет скользнуть, а начинает опрокидываться. Это происходит при определенном значении коэффициента трения. В случае «кубического» холодильника с равномерным распределением массы — при $\mu > 1$. Граничное значение μ полу-

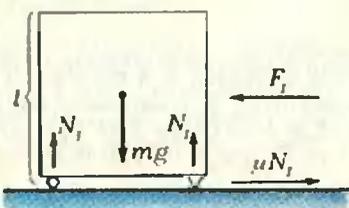


Рис. 1.

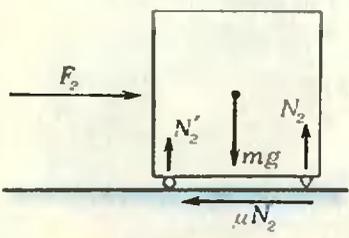
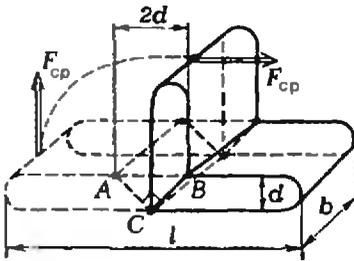


Рис. 2.

чается из условия отрыва роликов — когда моменты сил F_2 и mg относительно неподвижных опор становятся равными; тогда $F_2 = mg$, а сила трения равна или меньше μmg . Коэффициент трения зависит от соприкасающихся поверхностей, более менее реальный диапазон $0,1 \leq \mu \leq 0,6$. Для куба опасности нет, но для контейнера, вытянутого в высоту, возможность опрокидывания нужно принимать во внимание (чем больше высота, тем больше момент силы F_2).

И. И. Воробьев

Ф854. Оцените среднее усилие, которое надо прилагать к краю надувного матраца, чтобы согнуть его по середине под прямым углом. Матрац не имеет поперечных перетяжек. Необходимые для решения величины и их достаточно реальные числовые значения задайте сами и получите численный результат.



Оценим работу, которую надо совершить, чтобы согнуть матрац под прямым углом. По порядку величины ее можно оценить как $A \sim p \cdot \Delta V$, где p — перепад между атмосферным давлением и давлением воздуха внутри матраца, ΔV — изменение объема матраца в процессе его деформации. Как видно из рисунка, ΔV примерно равно произведению площади треугольника ABC на ширину матраца b :

$$\Delta V \approx \frac{2d \cdot d}{2} b = d^2 b,$$

где d — толщина матраца.

С другой стороны, работа по сгибанию матраца может быть оценена как произведение средней действующей силы F_{cp} на пройденное расстояние:

$$A \approx F_{cp} \frac{2l}{4} \sim F_{cp} l$$

(l — длина матраца).

Из приведенных выражений следует, что

$$A \sim p \cdot \Delta V \sim pd^2 b \sim F_{cp} l,$$

откуда

$$F_{cp} \sim \frac{pd^2 b}{l}.$$

Для числовых расчетов можно положить $b \approx 0,8$ м, $d \approx 0,15$ м, $l \approx 2$ м. Сложнее оценить p . Воспользуемся такими соображениями. Если встать на матрац ногами, то он, чаще всего, продавливается до земли. Следовательно, p одного порядка с давлением, оказываемым ступнями человека на землю:

$$p \sim \frac{mg}{S} \sim \frac{700 \text{ Н}}{0,2 \cdot 0,3 \text{ м}^2} \sim 10^4 \text{ Па}.$$

Окончательно вычисляем:

$$F_{cp} \sim \frac{10^4 \text{ Па} \cdot (0,15 \text{ м})^2 \cdot 0,8 \text{ м}}{2 \text{ м}} \sim 10^2 \text{ Н},$$

что неплохо согласуется с нашим житейским опытом.

Е. Н. Пальчиков

Ф855. В плоский конденсатор, присоединенный к полюсам батареи с ЭДС \mathcal{E} , полностью вдвинута параллельно его пластинам заряженная пластина на расстоянии b от одной из пластин конденсатора (см. рисунок). Найти силу, действующую на вдвинутую пластину, если ее заряд равен q . Силой тяжести пренебречь. Площадь пластин конденсатора равна S , расстояние между ними — d .

Электрическое поле внутри конденсатора представляет собой сумму поля, создаваемого пластиной с зарядом q , и поля, создаваемого зарядами пластин конденсатора. Напряженности этих полей обозначим, соответственно, E и E_1 . (На рисунке указаны направления полей E и E_1 для случая положительного заряда вдвинутой пластинки.)

Сила, действующая на вдвинутую пластину, равна

$$F = qE_1.$$

Напряженность E_1 можно найти, записав разность потенциалов между пластинками конденсатора в виде

$$\mathcal{E} = (E_1 + E)(d - b) + (E_1 - E)b.$$

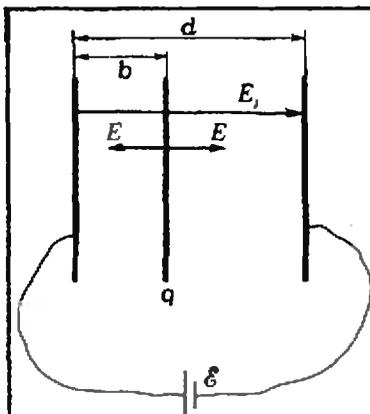
Отсюда

$$E_1 = \frac{\mathcal{E} + E(2b - d)}{d}.$$

Подставив $E = q/2\epsilon_0 S$, получим:

$$E_1 = \frac{\mathcal{E} + \frac{q(2b - d)}{2S\epsilon_0}}{d}.$$

Таким образом, сила, действующая на вдвинутую пластину,



Ф856. Через нагревательную спираль с постоянным сопротивлением пропускают постоянный ток. На сколько процентов изменится среднее количество тепла, выделяющегося в спирали за секунду, если через нее пропускать одновременно еще и переменный (синусоидальный) ток, амплитудное значение которого составляет 10% от величины постоянного тока?

Ф857. На блестящей банке имеется плоская вмятина, от которой отражается на экран пучок света. В банку наливают охлажденную жидкость. Отраженный сигнал заметно ослабляется. Объясните явление.

равна

$$F = \frac{q}{d} \left(\epsilon + \frac{q(2b-d)}{2\epsilon_0 S} \right).$$

Если пластина вдвинута точно по середине ($2b=d$), то она не изменяет заряд конденсатора и поле в нем. При несимметричном расположении пластины и достаточно большом ее заряде возможен случай, когда $E_1=0$, то есть когда на пластинах конденсатора не будет зарядов, несмотря на подключенный источник питания. Более того, из-за влияния вдвинутой пластины направление поля E_1 и знак зарядов на пластинах конденсатора могут быть противоположными тем, которые создаются источником.

Б. П. Бородин, А. П. Ершов

◆ Когда по спирали течет только постоянный ток I_0 , выделяющаяся в ней мощность равна $P_1 = I_0^2 R$.

Мгновенное значение тока в спирали, когда по ней течет и постоянный, и переменный ток, равно $I_0 + I \sin \omega t$. Мгновенная мощность, выделяющаяся в спирали в этом случае,

$$P_2 = (I_0 + I \sin \omega t)^2 R.$$

Так что мгновенная мощность при подключении к спирали дополнительного источника переменного тока изменяется на

$$\left(\frac{P_2 - P_1}{P_1} \right) 100\% = \frac{R(I_0 + I \sin \omega t)^2 - R I_0^2}{R I_0^2} 100\% = \\ = \left(2 \frac{I}{I_0} \sin \omega t + \left(\frac{I}{I_0} \right)^2 \sin^2 \omega t \right) 100\%.$$

Поскольку $\overline{\sin \omega t} = 0$, $\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}$ (средние значения $\sin \omega t$, $\sin^2 \omega t$), средняя мощность изменяется на

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} 100\% = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{I_0} \right)^2 100\% = 0.5\%.$$

В. Г. Дудников

◆ Когда в банку налили охлажденную жидкость, температура банки стала ниже точки росы, и на поверхности банки появились мелкие капли конденсировавшейся влаги из окружающего воздуха. Теперь свет рассеивается на этих каплях, и поэтому отраженный сигнал заметно ослабляется.

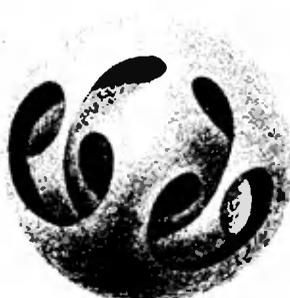
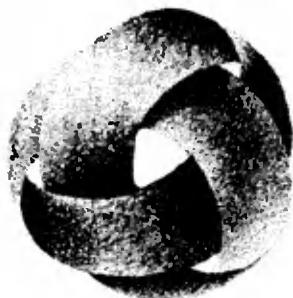
В. Г. Дудников

Наша обложка

На второй странице обложки наш художник, дав волю своему воображению, показал, как неориентируемая поверхность, полученная модификацией обыкновенной сферы, может стать

основой фантастического городского пейзажа. Здесь же им представлены другие поверхности (придуманные Ю. В. Котовым). Слева направо показаны: заузленный лист Мёбиуса,

более сложная неориентируемая модификация сферы и тор с заузленной дыркой. Все эти поверхности представляют собой «пленки» (см. статью А. П. Веселова из февральского номера журнала).





Цепочка с бегущим кольцом

Кандидат
физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

У вашего друга скоро день рождения. Легко придумать оригинальный и недорогой подарок. Вот как, затратив всего копейки пятьдесят и полчаса времени, можно сделать вещьцу, которая, несомненно, доставит удовольствие любознательному человеку и будет, на наш взгляд, замечательным подарком.

На фотографии слева — цепочка. Двойное переплетение блестящих колец создает красивую спираль. Но это не чисто декоративная игрушка, у этой цепочки есть свой секрет, свое особое свойство. Внимание, фокус!

Вы держите цепочку за верхнее кольцо, перехватываете другой рукой соседнее, а верхнее кольцо отпускаете, как бы даже бросаете его вниз. И вдруг кольцо... начинает сбегать вниз. Проскальзывая по другим кольцам, оно вьется вдоль всей цепочки и, достигнув нижнего положения, останавливается. А в руках у вас точно такая же цепочка, какой она была до этого.

Ваш друг, заинтересовавшись, берет цепочку, и после нескольких неудачных попыток — не каждое из верхних колец имеет свойство проскальзывать вниз — и у него получается тот же фокус: секунда — и кольцо, просверкав, оказывается внизу. Однако как это произошло, остается загадкой — глаз не успевает проследить за перемещением кольца.

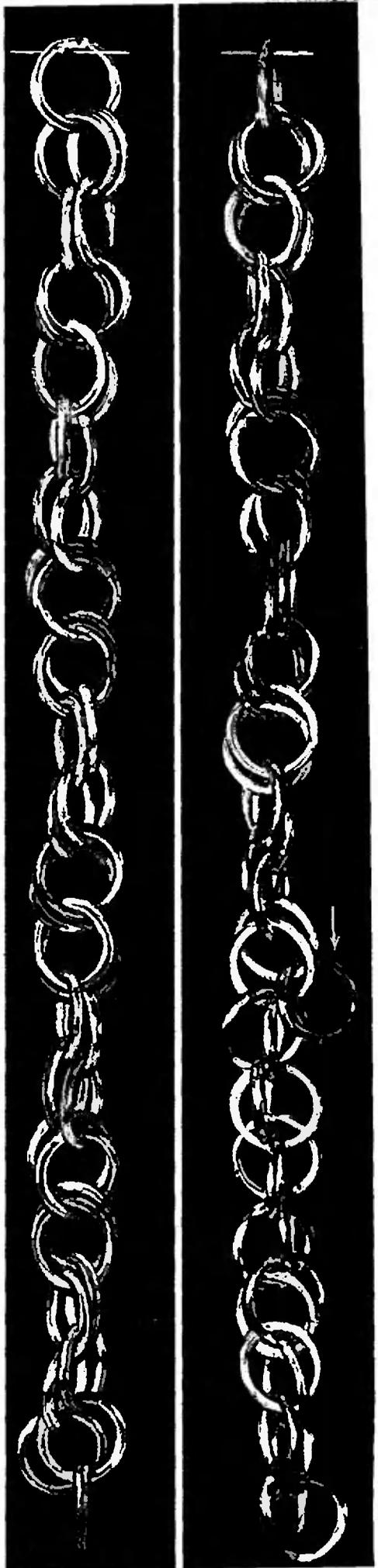
Изяждю поинтересившись с цепочкой, ваш приятель догадается, что сбегание кольца — это иллюзия. Все кольца принадлежат друг в друга, и по-

этому каждое кольцо не может переместиться относительно своих соседей дальше чем на диаметр. Кажущееся сбегание кольца по цепочке на самом деле — такие (на диаметр) последовательные перемещения отдельных колец. Выше того кольца, которое в данный момент находится в движении, и ниже него цепочка неподвижна — вот и создается впечатление, что по цепочке перемещается отдельное кольцо, как бы бежит уединенная волна. Как же это происходит?

Рассмотрим внимательно соединения колец. Оказывается, наша цепочка — это две обычные одинарные цепочки, сплетенные боками — фото 1. Будем называть ветвями эти две вертикальные последовательности колец. Расположение колец на фото 1 неустойчиво — именно поэтому цепочку приходится фиксировать и сверху, и снизу. Устойчивым оно становится, когда одна из ветвей находится на одно кольцо выше другой.

Очевидно, что таких устойчивых положений у цепочки два: верхней может быть как одна, так и другая ветвь цепи. Кажущееся сбегание кольца происходит, когда вы переводите цепочку из одного положения в другое. Одинарные ветви при этом должны «поменяться местами» — верхняя ветвь станет нижней и наоборот. Это, однако, не происходит одновременно вдоль всей цепочки. Если вы взяли за верхнее кольцо той ветви, которая пока находится в нижнем положении, и отпустили кольцо другой ветви, то нижняя часть цепочки еще «не знает» о том, что наверху произошел «дворцовый переворот». Ведь положение каждого кольца цепочки определяется его соседями, и кольцо может занять правильную позицию только после того, как все расположенные над ним кольца уже находятся в новом состоянии.

Посмотрите на правую цепочку на заставке. На ней зафиксирован момент, когда правильную позицию занимает колечко, находящееся посередине цепочки (на него указывает стрелка). Когда оно займет новое положение, то «освободится» кольцо, расположенное под ним. Оно тоже под действием силы тяжести повернется и упадет вниз. И так далее. Это бегущее вниз воз-



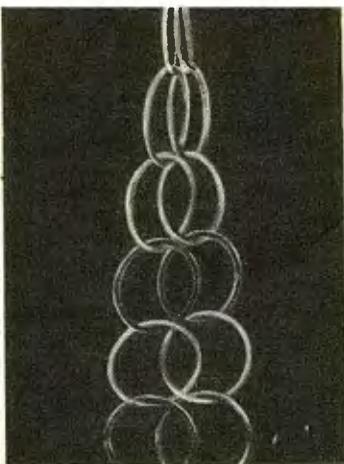


Фото 1.

мушенне, подробности которого трудно уловить глазом, и создает иллюзию скольжения вдоль цепочки одного кольца.

Чем больше размер колец, тем с большей скоростью бежит по цепочке волна. Однако время, за которое каждое колечко переходит в новое правильное положение, тоже больше для крупных колец. Поэтому уследить за перемещением каждого колечка в цепочке, собранной из мелких колец, труднее — тем эффективнее и иллюзия фокуса. Напротив, для объяснения фокуса удобнее крупная цепочка.

А теперь поучимся плести цепочку. Материалом для ее изготовления могут быть любые кольца; несколько их видов продается в галантерейных магазинах. Как правило, на них имеется разрез, по которому кольца нетрудно разогнуть и согнуть снова.

Можно скрупулезно скопировать соединение колец с любой из фотографий. Такой способ, однако, займет уйму времени и вызовет растущее чувство досады при почти неизбежных ошибках сборки. Но есть способ плетения цепи настолько простой и надежный, что при некоторой тренировке можно научиться собирать эту цепочку с завязанными глазами. Его мы и опишем.

Первая операция — изготовление соединения из пяти колец, изображенного на фото 2. Рисунок рядом с фотографией поясняет сборку этого звена.

Теперь нужно подвесить эти пять колец за одно из двух колец второго сверху яруса (за одно из двух красных колец на рисунке). При этом все звено окажется в таком положении, как на фото 3. В нижнем ярусе теперь два кольца.

В них нужно продеть новое разомкнутое кольцо, а в его разъем добавить еще одно

неразомкнутое кольцо (эта операция изображена на рисунке рядом с фото 3 штриховыми линиями). То, что получится, показано на фото 4. Разъем соединяется — фото 5.

Внизу получившейся у нас цепочки два яруса из одинарных колец. Поменим теперь положения ее одинарных ветвей. Для этого нужно подвесить цепочку за одно из двух колец второго сверху яруса. При этом по цепочке «пробежит» одно кольцо. В результате получится то, что показано на фото 6. Теперь внизу оказался ярус из двух колец. С ним следует повторить основную операцию сборки: снова продеть через них разомкнутое кольцо, на него надеть неразомкнутое, соединить разъем. Получится такая же цепочка, как на фото 5, но на один ярус длиннее. У этой цепочки поменяем положения одинарных ветвей, повторим основную операцию сборки — цепочка удлинится еще на один ярус. И так далее.

Таким образом собирается цепочка любой длины. Когда вы решите ее закончить, в последнее разомкнутое кольцо нового неразомкнутого уже не добавляйте.

Напоследок несколько советов. Не делайте очень длинных цепочек. При числе звеньев больше тридцати силы трения, пропорциональные весу цепочки и ее длине, становятся велики настолько, что препятствуют движению колец, и уединенная волна может застрять посреди цепочки. Для большей эффективности фокуса можно собрать цепочку из колец разного цвета в примерно равных количествах и в кажущемся беспорядке. Но наверху и внизу цепочки при этом поставить кольца таким образом, чтобы «сброс» кольца сверху приводил к появлению внизу кольца того же цвета. Это усилит впечатление проглядывания кольца вдоль цепочки.



Фото 2.



Фото 3.

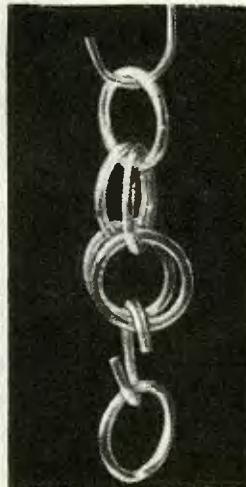


Фото 4.

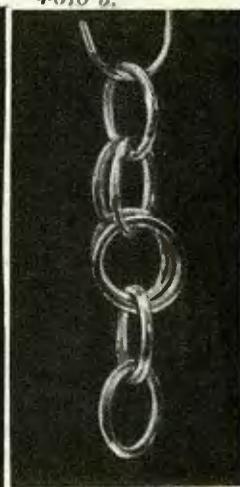


Фото 5.

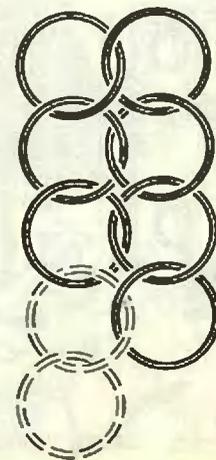
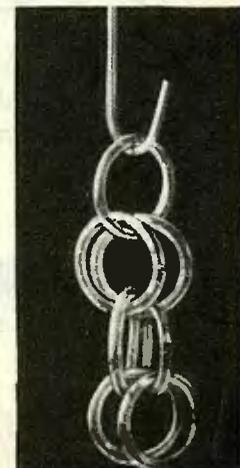
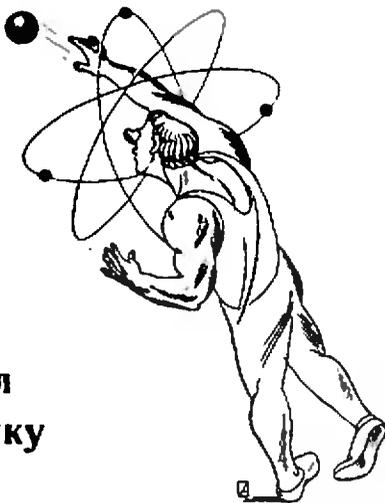


Фото 6.





Кто решил задачку

13 августа 1983 года «Квант» побывал в гостях у «Комсомольской правды» — в 530-м выпуске «Клуба любознательных» было рассказано о нашем журнале и предлагались 3 задачи — 2 по математике и 1 по физике. Задачи по математике решили многие читатели. Напомним эти задачи.

1. Десять рабочих должны изготовить 50 изделий. Каждое изделие должно быть окрашено (на это нужно 10 минут), а затем смонтировано (20 минут). После окраски изделие 5 минут сохнет. Сколько рабочих назначить малярами и сколько — монтажниками, чтобы работа была выполнена в кратчайшее время?

2. Четыре предприятия, расположенные в вершинах квадрата, нужно соединить кратчайшей сетью дорог. Как это сделать? Соединять по сторонам квадрата — невыгодно. Лучше, конечно, провести две дороги по диагоналям. Но оказывается, что и это не дает оптимального решения. Каково же оно? А как быть, если 4 предприятия не находятся в вершинах квадрата? Если их не 4, а 3, 5, 6? Попробуйте построить общую теорию кратчайшей сети дорог между любым конечным числом пунктов.

«Изюминка» первой задачи — в неоднозначности ее решения. Кратчайшее время в 195 минут получается для трех различных способов деления рабочих на маляров и монтажников; а именно, 3 маляра и 7 монтажников, 4 маляра и 6 монтажников и даже 3 маля-

ра и 6 монтажников. В последнем случае один из рабочих оказывается лишним. Читатели предлагают назначить его либо бригадиром, либо упаковщиком.

Если же маляров будет меньше трех (два или один), то время только на окраску займет не менее 250 минут, а если монтажников будет 5 или меньше, то монтаж займет не меньше 200 минут. Поэтому предложенное разделение является наилучшим. Его прислали многие читатели.

Для решения второй задачи оказывается очень важным разоборать случай трех предприятий. Здесь ответ таков: если в треугольнике ABC (с предприятиями в точках A, B, C) все углы не превосходят 120° , то кратчайшей сетью дорог будет система дорог, соединяющая некоторую узловую точку O с точками A, B и C , где точка O выбрана так, чтобы каждый из углов AOB, AOC и BOC равнялся 120° . Если же один из углов этого треугольника, например при вершине A , больше (или равен) 120° , то кратчайшей сетью дорог будут две дороги, соединяющие A с B и A с C . Из этого факта следует многое для общего решения задачи. Например, то, что для любого количества предприятий на оптимальной сети дороги не могут расходиться под углом, меньшим 120° . Для квадрата (случай 4 предприятий) оптимальная сеть изображена на рисунке, там имеются два узловых пункта, в которых дороги расходятся под углами в 120° .

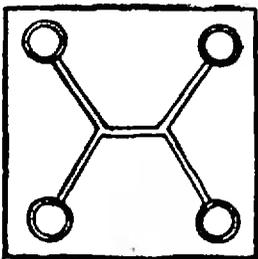
Для большего количества точек «предприятий» можно построить несколько различных систем дорог, удовлетворяющих указанному свойству. А дальше? Дальше нужно выбрать из них наилучшую систему — ту, у которой сумма длин дорог наименьшая.

Любопытно, что эту задачу прекрасно решает... мыльная пленка, которая, как известно, стремится занять положение, при котором ее площадь минимальна. Можно поставить такой опыт — между двумя параллельными стеклами перпендикулярно им закрепить 4 карандашника — «предприятия» и окунуть эту систему в мыльную воду. Вынув систему из воды, вы увидите решение второй задачи.

Задачу по физике большинство читателей решило неверно. Наиболее полное решение прислал читатель Сандрасулов Азия. Вот эта задача.

На одном из заводов в соответствии с технологией требовалось разогревать большие стальные цилиндрические болванки. Равномерный разогрев таких болванок в печах осуществлять было трудно и дорого. Тогда попробовали их разогревать, поместив вертикально в соленоид, питаемый током от городской сети (50 Гц). Результат оказался неожиданным: из сплошных цилиндров получились трубы (металл внутри болванок расплавился и вытек). Объясните, почему это произошло.

Вкратце ее решение сводится к следующему. При пропускании через соленоид переменного тока в болванке циркулируют вихревые токи, которые нагревают ее. Тепло выделяется во всем объеме болванки, но у поверхности температура будет существенно ниже из-за теплоотдачи в окружающее пространство через излучение и вследствие отвода тепла окружающим воздухом. Поэтому внутренняя часть болванки нагреется до температуры плавления, тогда как поверхностный слой еще останется в твердом состоянии. Жидкий металл вытечет под действием силы тяжести, оставив твердую «трубу».



КВАНТ УАЫБАЕТСЯ

Вот такие мысли

(из ответов читателей на 530-й выпуск «Клуба любознательных»)

Я не знаю, что такое «соленоид», но думаю, что произошла реакция металла болванок с этим самым соленоидом под действием тока, причем из-за малой мощности тока не со всем металлом, а только с частью, то есть с поверхностью.

(Н. Р., г. Целиноград)

Движение тока — одностороннее движение от источника к потребителю. При прохождении электрическим током металла образуется тепловая энергия. Но как она проходит болванку? Снизу вверх! Значит, тепловая энергия от движения тока уменьшается снизу вверх. С увеличением тепловой энергии движение монов ускорится и наступит такой момент, когда одно агрегатное состояние металла сменится другим, то есть кристаллическое — жидким. Под действием силы тяжести сталь выльется.

(О. П., г. Моздок)

Я так подумал, что если начнется драка на мосту, то люди или еще кто будут держаться к середине, чтобы не вылететь с моста. Так же ведут себя и атомы в проводнике, но если добавить энергии на получившиеся трубы, то они расплавятся.

(Н. Н., г. Пермь)

Когда тело, в данном случае болванка, нагреется, размах колебаний настолько увеличится, что нарушится порядок в расположении частиц в кристаллах. Но соленоид, начав работать, будет испускать магнитные волны, и эти магнитные волны будут удерживать порядок частиц в кристаллах только лишь по круговой орбите и в определенных слоях (это зависит от соленоида). А на внутренние слои это действовать не будет, и поэтому металл из болванки будет вытекать. Останется только металл, на который воздействует соленоид, то есть уже готовое изделие — труба.

(Р. К., г. Баку)

При бригадном подряде работа заканчивается за 150 минут.

(К. Р., г. Рига)

Ну а десятый пусть складывает готовые изделия в ящик.

(Р. М., Джамбульская обл.)

Получится паутина дорог, из которой видно, что тут много лишнего. Так что лучше всего — сделать между предприятиями площадь и всю ее заасфальтировать.

(рядовой А. П.)





Теплоемкость идеального газа

Доктор физико-математических наук
С. М. КОЗЕЛ,
кандидат физико-математических наук
А. А. ШЕРОНОВ

Определение теплоемкости связано с первым законом термодинамики — законом сохранения и превращения энергии в тепловых процессах. Согласно этому закону, количество теплоты Q , переданное телу (или системе тел), идет на изменение ΔU его внутренней энергии и на совершение работы A' над внешними телами:

$$Q = \Delta U + A'.$$

Для однородного тела удобно говорить о теплоемкости одного моля вещества. Молярной теплоемкостью C называют количество теплоты, полученное одним молем вещества при нагревании его на один градус. Если в процессе нагревания количеству вещества $\nu = m/M$ (здесь m — масса, M — молярная масса вещества) было передано количество теплоты Q , а его температура изменилась от T_1 до T_2 , то

$$C = \frac{Q}{\nu(T_2 - T_1)} = \frac{Q}{(m/M)(T_2 - T_1)}.$$

В Международной системе единиц (СИ) молярная теплоемкость измеряется в Дж/(К·моль).

Наряду с молярной теплоемкостью C можно определить удельную теплоемкость c , то есть теплоемкость единицы массы вещества. Очевидно, что $c = C/M$.

Зная теплоемкость вещества в данном термодинамическом процессе, легко найти полученное телом количество теплоты:

$$Q = mc(T_2 - T_1) = \frac{m}{M} C(T_2 - T_1) = \nu C(T_2 - T_1).$$

Очень важно понимать, что работа A' , совершаемая над внешними те-

лами, зависит от условий, при которых происходит процесс передачи тепла. Поэтому теплоемкость определяется не только свойствами вещества, но и видом термодинамического процесса.

Например, при изотермическом расширении газа ($T = \text{const}$) к нему подводится тепло, но его температура остается неизменной. Из определения следует, что теплоемкость газа в изотермическом процессе бесконечно велика. В этом случае все переданное системе количество теплоты идет на совершение работы: $Q = A'$. Если тот же газ участвует в адиабатном процессе, то его температура изменяется, а получаемое газом количество теплоты равно нулю. Следовательно, в адиабатных процессах теплоемкость равна нулю, и работа A' газа над внешними телами совершается за счет убыли внутренней энергии: $A' = -\Delta U$.

Итак, теплоемкость газа зависит от термодинамического процесса. Процессы, при которых теплоемкость остается неизменной, принято называть политропическими. Примерами политропических процессов, наряду с изотермическим и адиабатным, являются также изохорный ($V = \text{const}$) и изобарный ($p = \text{const}$) процессы. Соответствующие им молярные теплоемкости обозначают через C_V и C_p . Рассмотрим эти процессы более подробно (рис. 1).

В первом случае ($V = \text{const}$) поршень закреплен (см. рис. 1, а), и газ при нагревании работы не совершает. Все полученное газом тепло идет на увеличение его внутренней энергии. Во втором случае ($p = \text{const}$) поршень свободен (см. рис. 1, б), газ при нагревании расширяется и совершает работу. Полученное газом тепло лишь частично идет на увеличение внутренней энергии, остальная часть затрачивается на со-

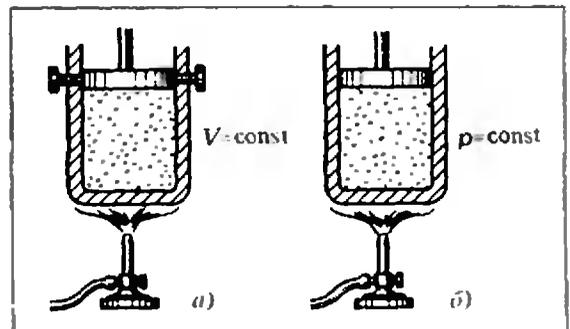


Рис. 1.

вершение работы по расширению. Ясно, что для повышения температуры газа на один градус во втором случае необходимо передать газу большее количество теплоты, следовательно, $C_p > C_v$.

Найдем теперь количественную связь между C_p и C_v . Из молекулярно-кинетической теории известно, что внутренняя энергия идеального газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре. В учебнике «Физика 9» показано, что для одноатомного газа $U = 3/2 R\nu T$ (где R — универсальная газовая постоянная). При изохорном процессе $A' = 0$, $Q = \Delta U = C_v \nu (T_2 - T_1)$. Отсюда следует, что для одноатомного газа молярная теплоемкость при постоянном объеме равна $C_v = 3/2 R$.

Работа газа при изобарном расширении вычисляется по формуле

$$A' = p(V_2 - V_1) = p\Delta V.$$

Если в рассматриваемом термодинамическом процессе давление изменяется, эту формулу тоже можно применять, но только для очень малых участков процесса, на которых изменение объема ΔV мало и поэтому давление p можно приближенно считать постоянным. Мы можем записать теперь первый закон термодинамики в виде

$$Q = C_v \nu (T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1) = C_v \nu \Delta T + p\Delta V.$$

Отсюда, используя определение молярной теплоемкости, получаем формулу для теплоемкости идеального газа в произвольном процессе:

$$C = \frac{Q}{\nu(T_2 - T_1)} = C_v + \frac{p}{\nu} \frac{\Delta V}{\Delta T}.$$

Изменения объема ΔV и температуры ΔT в этой формуле связаны уравнением состояния идеального газа $pV = \nu RT$ и уравнением теплового процесса, в котором участвует газ. В частности, для изобарного процесса

$$p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1), \text{ или } \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{\nu R}{p}.$$

Следовательно, теплоемкость C_p одного моля идеального газа в процессе при $p = \text{const}$ есть

$$C_p = C_v + R.$$

Для одноатомного газа $C_p = 5/2 R$.

Заметим, что у твердых и жидких тел теплоемкости C_p и C_v мало отличаются друг от друга. Это связано с тем, что при нагревании твердых или жидких тел их объем изменяется очень мало, так что в обычных условиях (то есть при атмосферном давлении или близ-

ком к нему) совершаемая при расширении работа практически оказывается равной нулю. В этом случае теплоемкость равна изменению внутренней энергии тела при нагревании на один градус.

Теперь проиллюстрируем сказанное на нескольких конкретных задачах, которые в разные годы предлагались абитуриентам на вступительных экзаменах в Московском физико-техническом институте.

Задача 1. *Некоторое количество идеального газа нагревается при постоянном давлении $p = 1$ атм от температуры $T_1 = 300$ К до температуры $T_2 = 400$ К. Какую работу совершил газ в этом процессе, если его начальный объем $V_1 = 3$ л?*

Пусть ν — данное количество вещества, C_v и C_p — молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и давлении соответственно.

Подведенное к газу количество теплоты

$$Q = \nu C_p (T_2 - T_1),$$

а увеличение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \nu C_v (T_2 - T_1).$$

Совершенная газом работа A' , по первому закону термодинамики, есть

$$A' = Q - \Delta U = \nu (C_p - C_v) (T_2 - T_1) = \nu R (T_2 - T_1).$$

Из уравнения состояния идеального газа находим

$$\nu R = pV_1 / T_1,$$

тогда окончательно для работы газа получим

$$A' = pV_1 (T_2 / T_1 - 1) = 100 \text{ Дж.}$$

Разумеется, приведенное решение не является единственно возможным. В данной задаче можно обойтись и без понятия теплоемкости, воспользовавшись непосредственно формулой для вычисления работы газа при изобарном процессе.

Задача 2. *Моль идеального газа из состояния с температурой $T_1 = 100$ К расширяется изобарно, а затем изохорно переходит в состояние с начальной температурой (рис. 2). Во сколько раз изменился при этом объем газа, если для перевода газа из начального состояния в конечное к нему пришлось подвести количество теплоты $Q = 831$ Дж?*

Тепло подводится к газу на изобарном и отводится на изохорном участках:

$$Q = \nu C_p (T_2 - T_1) + \nu C_v (T_1 - T_2) = \nu R (T_2 - T_1).$$

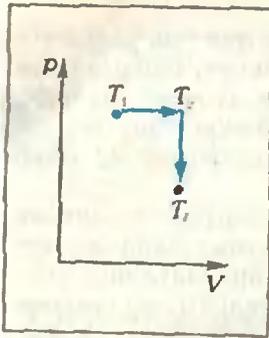


Рис. 2.

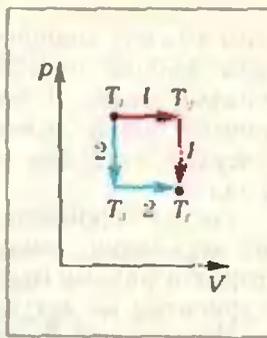


Рис. 3.

Для изобарного участка из уравнения состояния находим

$$T_2 - T_1 = T_1 (T_2/T_1 - 1) = T_1 (V_2/V_1 - 1).$$

Из этих соотношений получаем

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 + \frac{Q}{\nu R T_1} = 2.$$

Задача 3. Из начального состояния с известной температурой T_1 моль идеального газа переходит в состояние с той же температурой двумя путями (рис. 3). В одном из них газ сначала нагревается изобарно до температуры $T_2 = 2T_1$, а затем изохорно охлаждается. В другом — газ сначала изохорно охлаждается, а затем изобарно нагревается. Найдите разность количеств теплоты, подведенных к газу в обоих случаях.

Решение этой задачи аналогично предыдущему:

$$Q_1 = \nu C_p (T_2 - T_1) + \nu C_V (T_1 - T_2),$$

$$Q_2 = \nu C_V (T_3 - T_1) + \nu C_p (T_1 - T_3),$$

и

$$Q_1 - Q_2 = \nu R (T_2 + T_3 - 2T_1).$$

Применяя уравнение состояния $pV = \nu RT$ для изобарных участков процессов 1 и 2, найдем связь температур T_1 , T_2 и T_3 :

$$p_1 = \frac{\nu RT_1}{V_1} = \frac{\nu RT_2}{V_2}, \quad p_2 = \frac{\nu RT_3}{V_1} = \frac{\nu RT_1}{V_2},$$

откуда

$$T_1^2 = T_2 T_3.$$

По условию $T_2 = 2T_1$, поэтому $T_3 = T_1/2$.

Окончательно получаем

$$Q_1 - Q_2 = \nu R T_3 = \nu R T_1 / 2.$$

Задача 4. Моль идеального газа расширяется по закону $pV^2 = \text{const}$. Определите молярную теплоемкость газа в этом процессе.

Как было сказано раньше, молярная теплоемкость газа

$$C = C_V + \frac{p \Delta V}{\nu \Delta T}.$$

Из уравнения состояния $pV = \nu RT$ и уравнения процесса $pV^2 = \text{const}$ получаем

$$VT = \text{const}.$$

Это равенство справедливо при любых V и T , поэтому

$$(V + \Delta V)(T + \Delta T) = VT.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малым слагаемым $\Delta V \Delta T$, находим отношение изменения объема ΔV к изменению температуры ΔT :

$$\nu \Delta T + T \Delta V = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta V}{\Delta T} = -\frac{V}{T}.$$

Тогда окончательно молярная теплоемкость оказывается равной

$$C = C_V - \frac{pV}{\nu T} = C_V - R.$$

Нетрудно убедиться в том, что при расширении по закону $pV^2 = \text{const}$ газ охлаждается (это непосредственно следует из условия $VT = \text{const}$). За счет убыли его внутренней энергии совершается работа по расширению ($A' > 0$) и некоторое количество теплоты отдается окружающим телам ($Q < 0$).

Задача 5. Моль идеального газа помещают в цилиндр с подвижным невесомым поршнем, скрепленным с дном с помощью пружины, растяжение которой подчиняется закону Гука (рис. 4). Определите теплоемкость газа, считая внешнее давление равным нулю и пренебрегая длиной нерастянутой пружины.

Пусть p — давление газа, $V = Sx$ — объем, занимаемый газом, где S — сечение цилиндра, x — длина растянутой пружины. Обозначим жесткость пружины через k и запишем условие равновесия поршня:

$$pS = kx, \quad \text{или} \quad pS^2 = kV.$$

Из последней формулы следует, что изменения давления Δp и объема ΔV связаны соотношением

$$\Delta p = \frac{k}{S^2} \Delta V = \frac{p}{V} \Delta V.$$

Из уравнения состояния $pV = \nu RT$, справедливого при любых p , V , T , находим

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = \nu R (T + \Delta T).$$

Раскрывая в последнем равенстве скобки и пренебрегая малым слагаемым вида $\Delta p \Delta V$, получим

$$p \Delta V + V \Delta p = \nu R \Delta T,$$

или, учитывая связь Δp и ΔV ,

$$\frac{p \Delta V}{\nu \Delta T} = \frac{R}{2}.$$

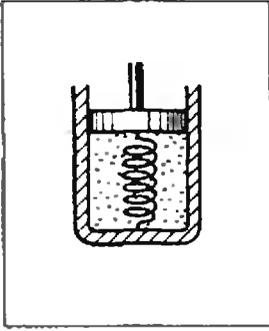


Рис. 4.

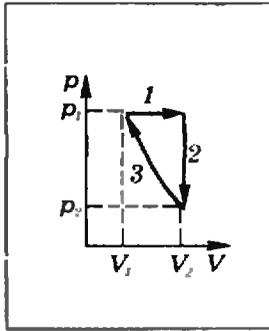


Рис. 5.

гревается изохорно, а затем изобарно охлаждается до некоторой конечной температуры. Найдите эту температуру, если известно, что количество теплоты $Q = 1500$ Дж, подведенное на изохоре, равно по модулю количеству теплоты, отведенного от газа на изобарном участке.

2. Моль идеального газа совершает замкнутый цикл (рис 5). Сначала газ изобарно нагревается, так что его объем увеличивается: $V_2/V_1 = n$. Затем он изохорно охлаждается, так что его давление уменьшается: $p_2/p_1 = m$. Наконец, газ адиабатно переходит в исходное состояние. Определите по этим данным работу газа на адиабатном участке, если известна его начальная температура T_1 и молярная теплоемкость C_V .

3. Идеальный одноатомный газ находится в масляном пузырьке, помещенном в вакуумную камеру. Найдите теплоемкость (в расчете на моль) газа при его нагревании. Теплоемкостью пленки и зависимость коэффициента поверхностного натяжения жидкости от температуры пренебречь. Указание. Давление p связано с радиусом пузыря r и коэффициентом поверхностного натяжения σ формулой $p = 4\sigma/r$.

Таким образом, теплоемкость газа

$$C = C_V + \frac{p}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T} = C_V + R/2.$$

Упражнения

1. Моль идеального одноатомного газа из состояния с начальной температурой $T_1 = 300$ К на-

Задача для исследования

Цепные дроби и дихотомическая последовательность Штерна

Взгляните на таблицу 1. В ее верхней, «нулевой», строке стоят две дроби $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$.

Чтобы получить любую из последующих строчек, надо взять предыдущую строчку и между каждыми двумя ее соседними дробями вставить дробь, числитель которой равен сумме их числителей, а знаменатель — сумме их знаменателей. В n -й строчке будет $2^n + 1$ чисел, которые мы обозначим через $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,2^n}$.

Любопытно, что в процессе составления таблицы 1 в числителях дробей будет многократно возникать одна и та же таблица 2, образованная знаменателями дробей из таблицы 1 (таблицу 2 называют «дихотомической последовательностью Штерна»). Таблица 1 обладает замечательным свойством, о котором рассказывалось в статье В. Н. Вагутева «Близкие дроби» («Квант», 1975, № 8):

каждая несократимая дробь $\frac{m}{n}$,

$0 < \frac{m}{n} < 1$, появляется в этой таблице не позже чем в $(n-1)$ -й строчке и встречается во всех следующих строчках ровно по одному разу. Как заметил наш читатель А. Одес

Номер строки									
0	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{1}$
1	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{1}$				$\frac{1}{1}$
2	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$	
3	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$
...								
n	$a_{n,0} \ a_{n,1} \ \dots \ a_{n,2^n}$								
...								

Таблица 1

1									1
1				2					1
1		3		2		3			1
1	4	3	5	2	5	3	4		1

Таблица 2

ский, с помощью цепных дробей можно получить явную формулу для числа $a_{n,p}$. Докажите, что каждое число $p < 2^n$ можно представить в виде

$$p = 2^{k_1} - 2^{k_2} + 2^{k_3} - \dots \pm 2^{k_r},$$

где $k_1 > k_2 > \dots > k_r > 0$, и тогда

$$a_{n,p} = \frac{1}{|n+1-k_1|} + \frac{1}{|k_1-k_2|} + \frac{1}{|k_2-k_3|} + \dots + \frac{1}{|k_{r-1}-k_r|}.$$

где мы воспользовались сокращенными обозначениями для цепных дробей (см., например, «Квант», 1983, № 5, с 18).

Попробуйте также выяснить, в какой именно строчке и на каком месте впервые появляется в таблице 1 дробь $\frac{m}{n}$. Напишите нам о других интересных закономерностях и формулах, которые вам удастся обнаружить в этой таблице.

Н. Б. Васильев

Об одном свойстве параболы

Г. Г. БОЯХЧАН

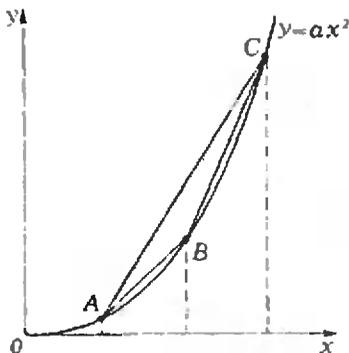


Рис. 1.

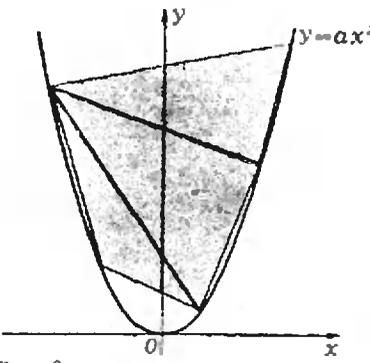


Рис. 2.

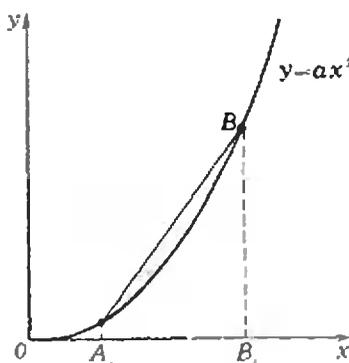


Рис. 3.

На параболе $y = ax^2$ рассмотрим три точки A, B, C , проекции которых на ось Ox равноотстоят друг от друга: $|A, B_1| = |B, C_1| = m$ (рис. 1). Найдем площадь треугольника ABC .

Для этого обозначим через x_1, x_2, x_3 абсциссы точек A, B, C соответственно. По условию $x_2 = x_1 + m, x_3 = x_1 + 2m$. Трапеция A_1ACC_1 составлена из треугольника ABC и двух трапеций A_1ABB_1 и B_1BCC_1 , поэтому

$$S_{ABC} = S_{A_1ACC_1} - (S_{A_1ABB_1} + S_{B_1BCC_1}).$$

откуда

$$S_{ABC} = \frac{ax_1^2 + a(x_1 + 2m)^2}{2} \cdot 2m - \frac{ax_1^2 + a(x_1 + m)^2}{2} \cdot m - \frac{a(x_1 + m)^2 + a(x_1 + 2m)^2}{2} \cdot m.$$

Приводя подобные члены, получим простейшую формулу:

$$S_{ABC} = am^3. \tag{1}$$

Оказалось, что искомая площадь не зависит от абсциссы точки A , а только от расстояния m между соседними точками (и от параметра a , определяющего крутизну параболы).

Рассмотрим теперь общий случай — пусть абсциссы x_1, x_2, x_3 точек ABC произвольны. Если $x_1 < x_2 < x_3$, то можно рассуждать точно так же, как в предыдущем примере (см. рис. 1). Получим

$$S_{ABC} = \frac{ax_1^2 + ax_3^2}{2} (x_3 - x_1) - \frac{ax_1^2 + ax_2^2}{2} (x_2 - x_1) - \frac{ax_2^2 + ax_3^2}{2} (x_3 - x_2),$$

или, после приведения подобных членов,*

$$S_{ABC} = \left| \frac{a}{2} (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \right|. \tag{2}$$

Нетрудно проверить (проверку мы оставляем читателю), что при всех других соотношениях между абсциссами формула (2) сохраняет силу. Эта формула показывает, что площадь треугольника с вершинами на фиксированной параболы зависит только от разностей абсцисс его вершин. Когда треугольник скользит по параболы, изменяя форму, но сохраняя неизменными разности между абсциссами вершин, его площадь не меняется. Оказывается, что этим свойством обладает только парабола, но мы этого доказывать не будем.

В качестве задач мы предлагаем читателю найти доказательства трех следствий формулы (2):

1. Если все вершины выпуклого многоугольника, лежащие на параболы $y = ax^2$, передвигаются по параболы с сохранением разности их абсцисс, то площадь многоугольника не меняется. Указание. См. рис. 2.

2. Площадь S сегмента параболы $y = ax^2$ ограниченного отрезком, концы которого имеют абсциссы x_1 и x_2 (рис. 3), равна

$$S = \frac{a}{6} (x_1 - x_2)^3.$$

Указание. См. рис. 3. Площадь криволинейной трапеции

$$A_1ABB_1 \text{ находится как интеграл } \int_{x_1}^{x_2} ax^2 dx.$$

3. Предыдущие результаты (формулы (1) и (2), следствия 1 и 2) остаются в силе, если параболы $y = ax^2$ заменить на параболы общего вида $y = ax^2 + bx + c$.

Указание. Существует перемещение, превращающее одну параболы в другую.

* Знак модуля не нужен в случае, когда $x_1 < x_2 < x_3$, но требуется в других случаях (проверьте это!).

Спичечный коробок и экстремум

Р. Ш. ДАНЕЛИЯ

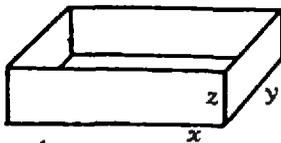
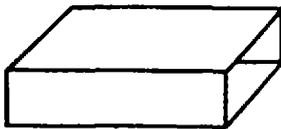


Рис. 1.

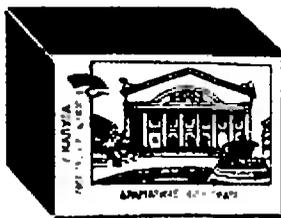


Рис. 2.



Рис. 3.

Эта задача мне пришла в голову, когда я рассматривал коллекцию спичечных коробков у своего приятеля. Он собирает не только этикетки, как делают многие, а коробки целиком. У него можно увидеть коробки самых разнообразных форм и размеров. Перебирая экспонаты коллекции, я подумал: каких размеров должна быть самая «выгодная» коробка? Ведь это — чисто математический вопрос, ему можно дать следующую строгую формулировку:

Среди всех спичечных коробков данного объема V обычной конструкции (то есть состоящих из выдвинутой открытой сверху коробочки и внешней части, открытой по бокам; см. рис. 1) найти форму (то есть отношение ребер $x:y:z$), обеспечивающую наименьшую затрату материала при изготовлении (толщина материала в счет не принимается).

Для решения этой задачи нам потребуется следующая Лемма. Если произведение трех положительных переменных a, b, c постоянно, то их сумма принимает наименьшее значение, когда $a=b=c$.

Доказательство. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \quad (1)$$

соотношение $abc = k = \text{const}$ дает $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{k}$, причем равенство достигается только при $a=b=c$.

Хотя доказательства неравенства (1) приводится во многих руководствах, будет не лишним познакомить читателя с еще одним его доказательством — отличным от традиционных.

Если ввести обозначения

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}}, \quad x_2 = \frac{b}{\sqrt[3]{abc}},$$

$$x_3 = \frac{c}{\sqrt[3]{abc}},$$

то требуемое неравенство запишется так:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \quad (2)$$

причем равенство достигается только при $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Итак, если произведение $x_1 x_2 x_3$ равно 1, то сумма $x_1 + x_2 + x_3$ не меньше 3 и равна 3 только в том случае, когда $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

В самом деле, рассмотрим два возможных случая:

1. Все три x равны между собой, то есть $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Ясно, что в этом случае $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

2. Не все x равны между собой. Так как их произведение равно единице, если одно больше 1, то другое меньше 1. Для определенности положим: $x_1 > 1, x_2 < 1$. Имеем:

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 + 1 < x_1 + x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 > x_1 x_2 + x_3 + 1 \quad (3)$$

Но $x_1 x_2 x_3 = 1$, и поэтому

$$x_1 x_2 + x_3 + 1 = \frac{1}{x_3} + x_3 + 1 =$$

$$= \frac{1}{x_3} + x_3 - 2 + 3 =$$

$$= \frac{(x_3 - 1)^2}{x_3} + 3 > 3.$$

Это же, согласно (3), дает $x_1 + x_2 + x_3 > 3$, что и требовалось доказать.

Теперь мы уже можем перейти к решению нашей задачи.

Пусть размеры коробки x, y, z (рис. 1). Коробка состоит из двух частей, причем площадь поверхности первой части $S_1 = xy + 2xz + 2yz$, а второй $S_2 = 2xy + 2xz$. Общая же площадь — их сумма — будет

$$S = 2yz + 3xy + 4xz.$$

Понятно, что материал, требуемый на изготовление коробки, пропорционален S , то есть мы должны подобрать x, y, z так, чтобы S было наименьшим. Для этого представим S в следующем виде:

$$S = xyz \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} \right)$$

или, учитывая равенство $xyz = V$,

$$S = V \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} \right).$$

Произведение слагаемых внутри скобки постоянно (оно равно $24/V$), поэтому в силу леммы наименьшее значение достигается, когда слагаемые равны, откуда $x:y:z = 2:3:4$.

Таким образом, расход материала будет наименьшим, когда длина, ширина и высота коробки относятся как $2:3:4$. Заметим, что чаще фабрики не соблюдают этого соотношения (рис. 2), но есть и коробки, изготовленные именно с учетом этого условия (рис. 3).



Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет прием учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, которое необходимо отослать до 10 сентября по адресу: 119899, ГСП, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите также два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество
Класс ЗФШ
Профессия родителей и
занимаемая должность
Подробный домашний адрес

Сидоров Иван Петрович

9-й

отец — инженер

мать — врач

248016, г. Калуга, ул. Карла Либкнехта,
д. 4, кв. 73

школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.

Номер и адрес школы

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 15 октября. Проверенные вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по различным разделам физики, изучаемым в средней школе. Решенные задания оцениваются, рецензируются и возвращаются учащимся. Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно окончившие обучение получают свидетельство об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающие в 9 класс ЗФШ решают задачи 1—4, а поступающие в 10 класс — задачи 4—7.

1. Два катера с различными скоростями плывут в одном направлении по течению реки. Когда они поравнялись, с одного из них в воду бросили спасательный круг. Через некоторое время после этого оба катера одновременно повернули обратно и с прежними относительными скоростями направились к месту, где был брошен круг. Какой из них встретит круг раньше?

2. Два бруска с массами M_1 и M_2 , связанные нерастяжимой нитью, находятся на горизонтальной плоскости. К ним приложены силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , составляющие с горизонтом углы α и β . Коэффициенты трения брусков о плоскость одинаковы и равны μ . Силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 по модулю меньше веса брусков. Найдите ускорение системы и натяжение нити, если система движется в сторону действия силы \vec{F}_1 .

3. Некоторая сила толкает тело массой $m=16$ кг вверх по гладкой наклонной плоскости длиной $l=3,1$ м и наклоном $\alpha=30^\circ$ к горизонту. Скорость тела у основания наклонной плоскости была $v_0=0,6$ м/с, а у ее верхнего края — $v=3,1$ м/с. Чему равна работа, произведенная силой?

4. Две одинаковые тележки, на которых находятся два одинаковых дворника, движутся по инерции с одинаковыми скоростями парал-

лельно друг другу. В некоторый момент времени на тележки начинает падать снег равномерным потоком. Дворник, стоящий на одной из тележек, все время сбрасывает снег вбок, а на второй тележке дворник спит. Какая из тележек быстрее пройдет одно и то же расстояние?

5. На двух одинаковых капельках воды находится по одному лишнему электрону, при этом сила электрического отталкивания капелек уравновешивает силу их взаимного тяготения. Каковы радиусы капелек?

6. Два одинаковых баллона, содержащие газ при температуре $t=0^\circ\text{C}$, соединены узкой горизонтальной трубкой диаметром $d=5$ мм, посередине которой находится капелька ртути. Капелька делит весь сосуд на две равные части объемом $V=200$ см³ каждая. На какое расстояние переместится капелька, если один баллон нагреть на $\Delta t=2^\circ\text{C}$, а другой на столько же охладить? Изменением объемов сосудов пренебречь.

7. Электрон влетает со скоростью v_0 в пространство между пластинами плоского конденсатора (через отверстие в нижней пластине) под углом α к плоскости пластин. Расстояние между пластинами d , разность потенциалов U , нижняя пластина заряжена положительно, верхняя — отрицательно. Какую кривую опишет электрон при своем движении? На сколько приблизится он к верхней пластине? Силой тяжести пренебречь.

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1983 году.

Ленинградский государственный университет имени А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты математико-механический и прикладной математики — процессов управления)

1. Даны правильный тетраэдр и шар, площади поверхностей которых относятся как $s:1$. Можно ли шар поместить в тетраэдр, если а) $s = 2\sqrt{3}$, б) $s = 3$?

2. Решите уравнение $\operatorname{tg} 7x = \sin 4x + \operatorname{tg} 3x$.

3. Биссектриса тупого угла α равнобедренной трапеции делит большую сторону длины a в отношении 1:2. Чему равна площадь трапеции?

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8 \sqrt{\frac{1}{4} (3 \log_8 x + \log_5 (y+1))^3} - \\ -7 \sqrt{\frac{1}{4} (\log_8 x^3 + 3 \log_5 (y+1))} = 1, \\ 11 \sqrt{\log_8 x^3 \cdot \log_5 (y+1)} - \\ -5 \sqrt[3]{\log_8 x \cdot \log_5 (y+1)^3} = 6. \end{cases}$$

3. Найдите все a , для которых любое решение неравенства

$$|1 + a|x - ax^2 > \frac{9}{16} \left| \frac{7}{16}a + 1 \right| - \frac{1}{8}$$

удовлетворяет также неравенству

$$1 - \operatorname{tg}^2(ax) < -\frac{1}{\cos(ax)}.$$

Вариант 2

(Физический факультет)

1. Из пункта B в пункт A , расположенный выше по реке, выплывает лодка и одновременно из A в B — катер. Катер доплывает до B , разворачивается и плывет в A , затем разворачивается и т. д. Скорости катера и лодки в стоячей воде равны v и $14v/209$ соответственно. Когда лодка преодолела половину расстояния между A и B , навстречу ей из A в B выплыла вторая лодка. Определите скорость течения реки, если в тот момент, когда вторая лодка прошла половину пути, катер в восьмой раз приплыл в B .

2. Угол α острый, а β — тупой, причем

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \operatorname{tg}^2 \beta = 51 - 10\sqrt{26}.$$

Докажите, что $a + 2\beta = 9\pi/4$.

3. Изобразите множество точек на плоскости, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $a^{y+3|x|} < 1 + 2a^{-y-3|x|}$, где a — положительное число.

4. Решите уравнение

$$\frac{6}{7} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y} + 4 \cos^2 \frac{y}{2} = 5.$$

5. Стенки и дно колодца, имеющего глубину H , укрепили слоем бетона толщины h . Исходное сечение колодца — равнобедренный треугольник со стороной a . Найдите объем израсходованного бетона.

Вариант 3

(психологический факультет; отделение экономической кибернетики экономического факультета; отделение математической лингвистики филологического факультета)

1. Из города M в город L выехала машина, а через t часов выехала машина из L в M . Их встреча произошла еще через T часов. Найдите время пробега каждой машины, если их скорости постоянны, а прибыли они в пункты назначения одновременно.

2. Решите уравнение

$$\frac{4}{25^{-x} + 8 + 16 \cdot 25^x} - \frac{5^x}{1 + 4 \cdot 25^x} + \frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{\sqrt{23}}{5} + \frac{1}{100}.$$

3. В меньшую из двух концентрических окружностей радиусов 1 и 2 вписан равнобедренный треугольник. Найдите площади, на которые разбивается большой круг прямыми, содержащими стороны треугольника.

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{(32 \sin^6 x)^2} + 4 \sin^6 x < 1 - \sin^4 x.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{|y|} x^2 + \log_x |y| = -2, \\ x^4 + yx^2 = 10 + y \end{cases}$$

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

1. Пуля налетает на неподвижный шар по линии, проходящей через его центр. Свойства шара и пули подобраны таким образом, чтобы на опыте были возможны три исхода: а) пуля пробивает шар насквозь, практически не меняя его массы, б) застревает в шаре; в) отскакивает от шара назад. Определите, что именно наблюдалось на опыте, в котором скорость пули при ударе уменьшилась по модулю вдвое, а отношение выделившегося количества теплоты к первоначальной кинетической энергии равно $\frac{1}{2}$.

2. В вертикальном закрытом цилиндре имеются два поршня, которые могут перемещаться без трения (рис. 1). Части A , B и C сосуда, разделенные поршнями, содержат одинаковое число молей идеального газа. При некоторой температуре, одинаковой во всем цилиндре, отношение объемов равно $V_A:V_B:V_C = 5:3:1$. Затем температура в цилиндре изменяется, и новое отношение объемов становится равным $V'_A:V'_B:V'_C = x:2:1$. Определите значение x . Во сколько раз изменилась температура?

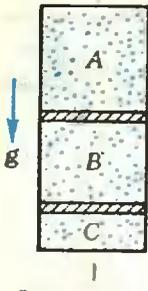


Рис. 1.

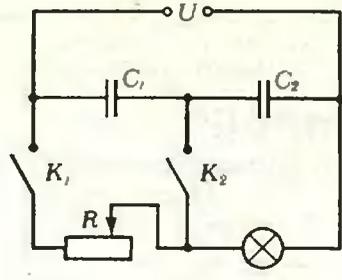


Рис. 2.

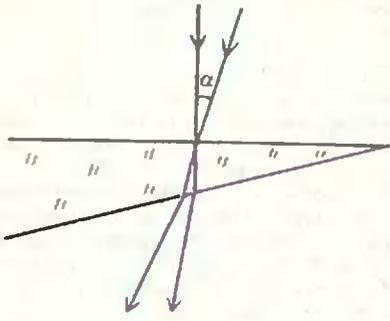


Рис. 3.

3. К входным клеммам цепи, схема которой показана на рисунке 2, приложено постоянное напряжение U . Оба ключа разомкнуты. Что нужно сделать, чтобы: а) напряжение на конденсаторе емкостью C_2 равнялось U ? б) напряжение на конденсаторе емкостью C_1 равнялось U и лампочка при этом горела? в) напряжения на обоих конденсаторах были одинаковы?

4. Луч света падает нормально на грань стеклянного клина с малым углом при вершине (на рисунке 3 этот луч показан красным цветом). На какой угол повернется преломленный луч при повороте падающего луча (изображенного синим цветом) на небольшой угол α вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка?

5. Теоретический вопрос: свойства электромагнитных волн.

Вариант 2

1. Две пули, имеющие разные массы, но одинаковые начальные импульсы, попадают в одинаковые неподвижные шары. Первая пуля пробивает шар насквозь. Вторая пуля, масса которой в 6 раз меньше массы шара, застревает в нем. После попадания пули шары движутся с одинаковыми скоростями. Во сколько раз уменьшилась скорость первой пули после вылета из шара? При каком условии в первом шаре выделится в 3 раза больше тепла, чем во втором? При каком условии во втором шаре выделится больше тепла, чем в первом?

2. Собрана электрическая схема, показанная на рисунке 4. При каком условии переключение ключа из положения А в положение В не приведет к изменению напряжения на конденсаторе емкостью C_1 ?

3. Некоторое число n одинаковых источников тока, соединенных между собой параллельно, подключены к резистору. Если переключить полярность одного источника, то сила тока в резисторе уменьшится в 2 раза. Определите значение n .

4. Вертикально расположенная рейка с нанесенными на нее делениями укреплена на дне водоема (рис. 5). Какой увидит эту рейку находящийся под водой наблюдатель без маски? Считать, что глаз расположен в точке А, нахо-

дящейся на глубине h и на расстоянии l от рейки.

5. Теоретический вопрос: резонанс.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления, химический и геологический факультеты

1. Двум одинаковым телам сообщают одинаковые начальные скорости, направленные под некоторым углом к горизонту. Одно тело свободное, другое движется вдоль спицы. Какое из них поднимется на большую высоту?

2. Стальная пуля массы m пробивает подвешенный на тонкой нити свинцовый шар массы M , в результате чего скорость пули уменьшается вдвое. Какая часть кинетической энергии пули пошла на нагревание?

3. Тяжелый стержень согнули посередине под углом 90° и подвесили свободно за один из концов. Какой угол этот конец образует с вертикалью?

4. На рисунке 6 изображен график процесса, проводимого с идеальным газом. Объем газа постоянен. Найдите точки, где масса газа максимальна и минимальна.

5. Два сосуда, содержащие один и тот же газ, соединены трубкой с краном. Объемы сосудов равны V_1 и V_2 , а давления в них — p_1 и p_2 . Каким будет давление газа после открытия крана соединительной трубки? Температуру газа считать постоянной.

6. Резистор с сопротивлением R потребляет мощность P . Если к нему подключить параллельно еще такой же резистор, то в них обоих выделится та же мощность. Нарисуйте простейшую схему, в которой это возможно, и рассчитайте ее.

7. На схеме, приведенной на рисунке 7, указаны сопротивления резисторов (в омах) и ток через один из резисторов. Определите все остальные токи и подаваемое напряжение.

8. При электролитическом способе получения никеля расходуется электроэнергия $W = 10$ кВт·ч на $m = 1$ кг металла. Электрохимический эквивалент никеля $k = 1080$ мг/(А·ч). При каком напряжении производится электролиз?

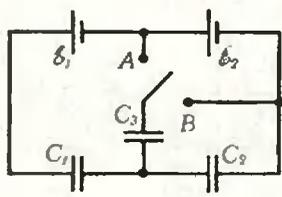


Рис. 4.

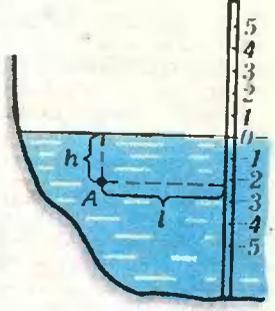


Рис. 5.

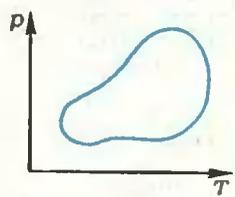


Рис. 6.

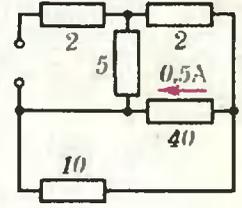


Рис. 7.

9. На какой угол повернется луч, отраженный от плоского зеркала, при повороте последнего на угол α ?

10. Кажущаяся глубина водоема равна H . Какова его истинная глубина?

Публикацию подготовили
А. С. Кондратьев, С. А. Назаров

Ленинградский политехнический институт имени М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет технической кибернетики)

1. Решите уравнение

$$2 \sin^2 x + \lg^2 x = 2.$$

2. Произведение первых трех членов геометрической прогрессии равно 1728, а их сумма равна 63. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

3. Найдите область определения и промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = -\sqrt{2} \left(\left(\frac{\lg^2 x + 1}{2 \lg x} - 1 \right)^{1/2} - \left(\frac{\lg^2 x + 1}{2 \lg x} + 1 \right)^{1/2} \right) \lg x$.

4. Пусть в треугольнике ABC средняя линия, параллельная стороне AB , пересекает биссектрису угла B в точке P , а K — точка касания вписанной окружности со стороной BC . Выразите вектор \vec{KP} через векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2 единичной длины и сонаправленные соответственно с \vec{AB} и \vec{CA} , если $|AB| = 18$, $|AC| = 12$ и $|BC| = 11$.

Вариант 2

(Физико-механический и радиофизический факультеты)

1. Решите уравнение

$$8^{\frac{x}{2}} = (\log_2 16) (2^{\frac{x+3}{x}} - 3).$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} = 1.$$

3. Дана функция $f(x) = \lg \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) \times$

$\times (1 - \sin 2x) - \cos 2x - 1$.

Найдите область определения функции $y = f'(x)$; докажите, что $f'(x) = 0$ во всех точках $D(f'(x))$, а $f(\sqrt{7})$ равно целому числу.

4. Пусть квадратное уравнение

$$(3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a+3 = 0$$

имеет корни x_1, x_2 . Найдите все такие $a (a \in R)$, что x_1 и x_2 удовлетворяют условиям $x_1 < -1 < x_2 < 1$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Автомобиль начал движение с места, двигался равноускоренно и через некоторое время достиг скорости $v = 10$ м/с. После этого мотор был выключен, и автомобиль двигался равнозамедленно до полной остановки. Найдите сред-

нюю скорость автомобиля на всем пройденном пути.

2. Ракета взлетает вертикально вверх, выбрасывая раскаленные газы последовательно двумя равными порциями. Скорость истечения газов относительно ракеты постоянна и равна u . Каким должен быть промежуток времени между сгоранием порций, чтобы ракета достигла наибольшей высоты? Считать, что сгорание топлива происходит мгновенно. Сопротивлением воздуха пренебречь.

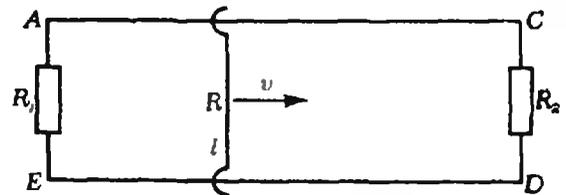
3. При подъеме воздушного пузырька со дна озера на поверхность его объем увеличивается в 3 раза. Найдите глубину озера.

4. В баллоне, объем которого $V = 0,04$ м³, под давлением $p = 1,5 \cdot 10^5$ Па при температуре $T = 300$ К находится газ. Определите, сколько молекул газа находится в баллоне.

5. Три одинаковые заряженные частицы, каждая с массой m и зарядом q , поместили в вершины углов равностороннего треугольника со стороной r_0 . Затем частицы одновременно освободили, после чего они стали симметрично разлетаться под действием кулоновских сил отталкивания. Найдите: 1) скорость каждой частицы в зависимости от расстояния r между частицами; 2) работу, которую совершили кулоновские силы, действующие на каждую частицу, при разлете частиц на очень большое расстояние друг от друга.

6. Как при параллельном, так и при последовательном соединении двух одинаковых аккумуляторов с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r и внешнем резисторе, сопротивление которого R , выделяется мощность $P = 16$ Вт. Какая мощность выделится на этом резисторе, если к нему подключить только один из аккумуляторов?

7. Прямоугольный контур $ACDE$ со скользящей перемычкой длины l находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости контура (см. рисунок). Индукция



магнитного поля равна B . Перемычка имеет сопротивление R , стороны AE и CD контура — сопротивления R_1 и R_2 . Пренебрегая самоиндукцией контура, найдите ток в перемычке при ее поступательном перемещении с постоянной скоростью \vec{v} .

8. Найдите энергию связи ядра, которое имеет одинаковое число протонов и нейтронов и радиус которого в полтора раза меньше радиуса ядра ^{21}Al .

9. Какая температура необходима, чтобы протоны приблизились друг к другу на расстояние $r_0 = 5 \cdot 10^{-15}$ м?

Публикацию подготовили Ю. Н. Волгин,
Ю. Д. Максимов, Б. П. Попов,
С. П. Преображенский, Б. А. Чихачев

Ленинградский государственный педагогический институт имени А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Найдите значение выражения при

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}}$$

2. Решите уравнение

$$\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1).$$

3. Докажите тождество

$$\frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = 1.$$

4. Докажите, что расстояние от всякой точки окружности, описанной около правильного треугольника, до одной из его вершин равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин.

5. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом β . Две грани углы при основании равны α . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Найдите значение выражения

$$\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

2. Решите уравнение

$$10 \cdot 2^x - 4^x = 16.$$

3. Решите неравенство

$$0,3^{15-2x} < 0,027.$$

4. Докажите тождество

$$\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

5. Найдите объем треугольной пирамиды, сторона основания которой равна b , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α .

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. К динамометру подвесили груз, при этом возникли колебания с частотой $\nu = 2$ Гц. На каком расстоянии от нулевого положения остановится указатель динамометра после прекращения колебаний? Массу пружины не учитывать.

2. Имеются источники тока, ЭДС каждого из которых $\mathcal{E} = 4$ В и внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Укажите хотя бы один из вариантов соединения источников тока в батарею, от которой лампочка, рассчитанная на напряжение $U = 4$ В и ток $I = 4$ А, горела бы в полный накал.

3. Постройте изображение предмета в собирающей линзе, если один конец предмета касается фокуса линзы, а другой — ее поверхности. Предмет расположен наклонно к главной оптической оси линзы.

Математический факультет

1. Двигаясь равноускоренно без начальной скорости, тело, пройдя некоторый путь, приобрело скорость $v = 14$ м/с. Чему была равна скорость тела, когда оно прошло половину этого пути?

2. Когда объем газа уменьшили на 10 %, а температуру увеличили на $\Delta t = 16^\circ\text{C}$, его давление возросло на 20 %. Определите начальную температуру газа.

3. Электроемкость колебательного контура $C = 10$ мкФ. Постройте график зависимости частоты колебаний тока от индуктивности L данного контура.

4. Отрезок AB расположен на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см. Чему равно увеличение данного отрезка, если его ближайший конец расположен от линзы на расстоянии $d = 30$ см, а длина отрезка $l = 10$ см?

Химический факультет

и факультет естествознания

1. Тело, двигаясь равноускоренно, за первые пять секунд своего движения прошло путь $l_1 = 100$ м, а за десять — $l_2 = 300$ м. Определите начальную скорость движения тела.

2. Сколько молекул содержится в объеме $V = 1$ м³ воздуха при давлении $p = 150$ кПа и температуре $t = 27^\circ\text{C}$?

3. На электрической плитке мощностью $P = 600$ Вт нагревается до кипения $V = 2$ л воды за $\tau = 40$ мин. Начальная температура воды была равна $t = 20^\circ\text{C}$. Определите КПД установки.

4. Сколько электроэнергии надо затратить для получения $V = 2,5$ л водорода при температуре $t = 25^\circ\text{C}$ и давлении $p = 100$ кПа, если электролиз ведется при напряжении $U = 5$ В и КПД установки $\eta = 75$ %?

Индустриально-педагогический

и художественно-графический факультеты

1. Объясните, что произойдет с давлением воды на стенки сосуда, в который она была налита, если в сосуд опустить железный кубик массой $m = 1$ кг? Сосуд до эксперимента был полностью заполнен водой.

2. Имеется шесть резисторов с сопротивлением $R = 2$ Ом каждый. Как, используя полностью все резисторы, получить сопротивление $R_0 = 2$ Ом?

3. Имеется электродвигатель постоянного тока, вольтметр, нить. Как, используя данные предметы, сконструировать демонстрационный прибор для измерения скорости равномерного движения тел?

Публикацию подготовили

З. Г. Алексеева, Л. А. Бирюков



Дифференцирование сложной функции

1. $12x^2(x^3+2)^3$;
2. $\frac{5x}{\sqrt{1+5x^2}}$;
3. $(2x-3) \cdot e^{x^2-3x}$;
4. $\frac{3x-4}{x^2-2x}$;
5. $\frac{3x-4}{(x^2-2x) \ln 10}$;
6. $5^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 5$;
7. $\frac{8-3x}{(4x-x^2) \ln 0,3}$;
8. $2 \sin(1-2x)$;
9. $-3 \sin 6x$;
10. $\frac{1}{2 \cos^2 x \sqrt{\lg x}}$;
11. $\lg^2 x + \frac{2x \lg x}{\cos^2 x}$;
12. $\frac{a \cos \sqrt{ax}}{2 \sqrt{ax}}$;
13. $\operatorname{ctg} x$;
14. $-\frac{3^x \ln 3}{x^2}$;
15. $\frac{2 \sin 2x}{\cos^2 2x}$.

Избранные школьные задачи

1. а) $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$.
- б) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - (ab\sqrt{2})^2 = (a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})$.
2. Пусть BC и AD — основания трапеции, M и N — соответственно их середины, O — точка пересечения диагоналей, а прямые AB и DC пересекаются в точке F (рис. 1). Рассмотрим гомотегию с центром в точке F , переводящую треугольник FBC в треугольник FAD ; при этой гомотегии точка M переходит в точку N . Поэтому точки M , N и F лежат на одной прямой.
3. а) Проведем через точки A и B прямые, пересекающиеся в точке C по ту же сторону от прямой AB , где лежит вторая данная прямая (рис. 2, а). Пусть прямая AC пересекает вторую данную прямую в точке D , а прямая BC — в точке E (рис. 2, б). Построим точку O пересечения прямых BD и AE . Тогда прямая CO пересекает прямую AB в искомой точке F (рис. 2, в) в силу задачи 2. б) Решение аналогично задаче 3а.
4. Ответ: квадрат с вершинами в точках $(1; 0)$, $(0; 1)$ и $(-1; 0)$.
5. Ответ: в 2,5 раза. Указание. Выясните, сколько траншей вырыли бы экскаваторы, если бы все указанное время они работали не поодиночке, а все вместе.
6. Ответ: $1/4$. Указание. Легко видеть (доказательство — от противного), что числа a и b либо разных знаков, либо положительны. В первом случае их произведение отрицательно, а во втором — положительно, поэтому имеет смысл рассматривать только положительные значения a и b . Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим поло-

жительных чисел, имеем:

$$2 - a + 4b > 2 \sqrt{a \cdot 4b} = 4 \sqrt{ab}.$$

поэтому $\sqrt{ab} < 1/2$, откуда $ab < 1/4$, причем равенство достигается, если $a = 4b$, то есть $b = 1/4$, $a = 1$. Другой путь решения: заметим, что $ab = b(2 - 4b) = 2b(1 - 2b)$, и найдем наибольшее значение квадратичной функции $f(b) = 2b(1 - 2b)$.

7. Ответ: купец обманул себя. Укажи на пе. Пусть l — длина левого плеча коромысла весов, а m — правого. Обозначим вес орехов, которыми купец уравновесил весы, когда гиря весом в 1 фунт лежала на левой чашке весов, через x . Тогда $l \cdot 1 = m \cdot x$, откуда $x = l/m$ (фунтов). Обозначив через y вес орехов, которыми купец уравновесил весы, когда фунтовая гиря находилась на правой чашке, аналогично получим, что $y = m/l$ (фунтов). Таким образом, $y = 1/x$ и купец отвесил покупателю $x + 1/x$ фунтов орехов. Но при $x > 0$, $x \neq 1$ (а эти неравенства следуют из условия задачи) имеет место неравенство $x + 1/x > 2$ (которое вытекает, например, из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим), значит, купец отвесил покупателю слишком много орехов.

8. Ответ: а) 2^{100} ; б) $2^{99}(1 + 6^{100})$; в) $2^{99}(1 - 6^{100})$.
 Указания. а) Из формулы (2) в условии задачи вытекает, что $S = f(1)$. Из формулы (1) получаем $f(1) = (1 + 5 - 8)^{100} \cdot 1 = 2^{100}$.

б) Из формулы (2) следует, что $f(-1) = -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{204} + a_{205}$, поэтому (используя пункт а) этой задачи) получаем

$$S_H = \frac{1}{2} (f(1) - f(-1)) = \frac{1}{2} (2^{100} + 12^{100}) = 2^{99} (1 + 6^{100}).$$

в) Поскольку, очевидно, $S_7 = S - S_H$ (см. пункты а) и б) этой задачи), получаем $S_7 = 2^{100} - 2^{99}(1 + 6^{100}) = 2^{99}(1 - 6^{100})$.

9. Данная функция определена на всей оси, поэтому также на всей оси определена и функция

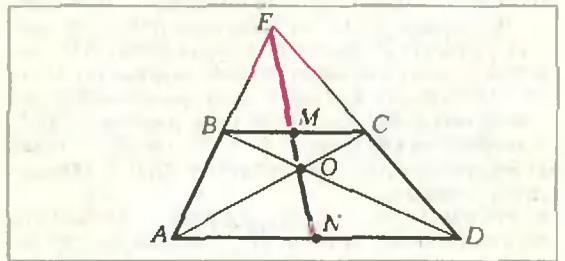


Рис. 1.

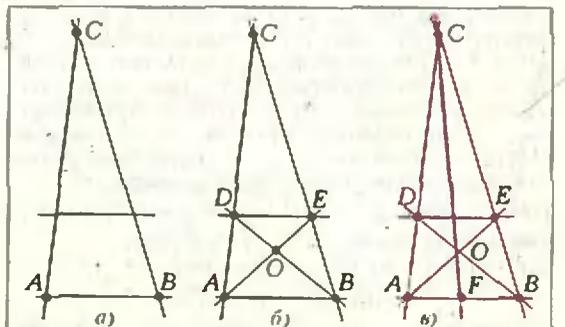


Рис. 2.

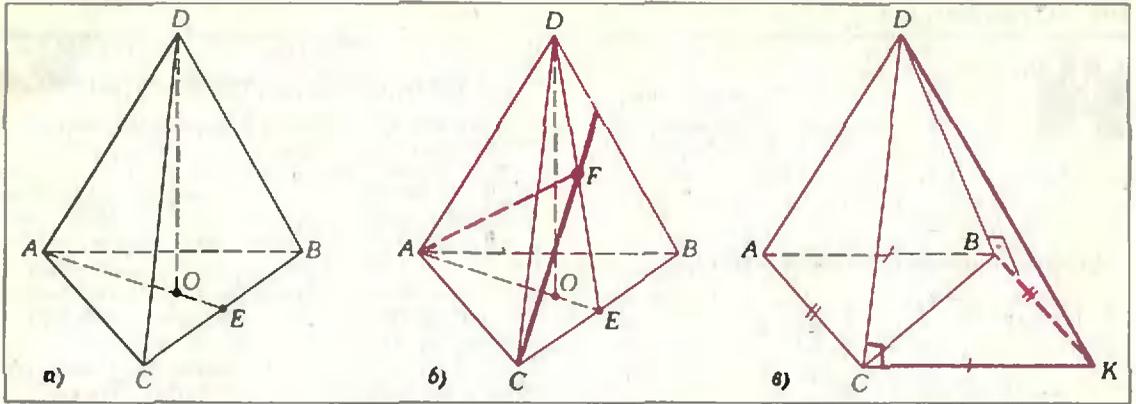


Рис. 3.

$f(-x)$. Утверждение задачи вытекает из того, что:

а) функция $\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ — четная (проверьте!);

б) функция $\psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ — нечетная;

в) при всех значениях x имеем: $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$.

10. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, DO — его высота.

а) Докажем, что скрещивающиеся ребра AD и BC перпендикулярны. По условию, AE — высота основания ABC (рис. 3, а), поэтому ребро BC перпендикулярно плоскости ADE (оно перпендикулярно непараллельным прямым DO и AE этой плоскости), в частности, прямой AD , лежащей в этой плоскости.

б) Докажем, что высота тетраэдра, опущенная из вершины A , проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) грани BCD . Сначала построим эту высоту. Для этого проведем высоту AF треугольника ADE . Прямая AF перпендикулярна двум непараллельным прямым плоскости BCD (как показано выше, ребро BC перпендикулярно плоскости ADE , в которой лежит прямая AF). Итак, AF — высота тетраэдра (рис. 3, б). Докажем, что точка F — ортоцентр треугольника BCD . Во-первых, DE — высота треугольника BCD (ребро BC перпендикулярно плоскости ADE). Во-вторых, прямая CF перпендикулярна ребру BD (это ребро перпендикулярно высоте тетраэдра AF и, по доказанному в пункте а), скрещивающемуся с ним ребру AC , значит, и всей плоскости AFC , в которой лежит прямая CF). Значит, F — точка пересечения высот треугольника BCD и утверждение доказано.

в) Из пункта б) вытекает, что любые две высоты тетраэдра пересекаются. Но если каждые две из четырех прямых в пространстве пересекаются, то они либо все лежат в одной плоскости, либо все проходят через одну точку.

г) Докажем, например, что сумма квадратов длин ребер BD и AC равна сумме квадратов длин ребер DC и AB . Для этого построим основание тетраэдра до параллелограмма $ABKC$ (рис. 3, в). Очевидно, треугольники DCK и DBK — прямоугольные (воспользуйтесь пунктом а) и тем, что $ABKC$ — параллелограмм) с общей гипотенузой DK . Приравняв правые части равенств $|DK|^2 = |DC|^2 + |CK|^2$ и $|DK|^2 = (DB)^2 + (BK)^2$, получим требуемое.

Другой путь: из векторного равенства

$$\vec{AB} - \vec{DC} = \vec{CB} - \vec{DA}$$

(разберитесь, как его получить), взяв скалярные

квадраты его левой и правой частей, получим доказываемое равенство.

11. а) Домножим и разделим левую часть доказываемого равенства на $2 \sin \frac{\pi}{5}$ и преобразуем полученные произведения синусов и косинусов, используя формулу приведения:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} &= \\ &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \\ &= \frac{\sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} - \sin \left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

б) Поскольку $\cos \frac{3\pi}{5} = \cos(\pi - 2\pi/5) = -\cos 2\pi/5$, перепишем равенство, доказанное в пункте а), в виде $\cos \pi/5 - \cos 2\pi/5 = 1/2$. Преобразовав левую часть полученного равенства

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 1/2,$$

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = 1/2,$$

$$1 - 2 \sin^2 18^\circ - \sin 18^\circ = 1/2,$$

$$4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0,$$

получим квадратное уравнение

$$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Решая его, находим (так как $x = \sin 18^\circ > 0$)

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

12. Ответ: правильный октаэдр, с вершинами в точках $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$, $(-1; 0; 0)$, $(0; -1; 0)$, $(0; 0; -1)$. Указание. Пересечение искомой фигуры с плоскостью $z=0$ (то есть с плоскостью XOY) — фигура, задаваемая неравенством $|x| + |y| \leq 1$ (см. задачу 4). Аналогично пересекают эту фигуру и другие координатные плоскости. Используйте также симметрией искомой фигуры относительно координатных плоскостей, осей и начала координат.

13. Ответ: а) 0; б) 2. Указание. а) Поскольку $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$, можно, обозначив $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2$ через t , переписать данное уравнение в виде

$$t + \frac{1}{t} = 2.$$

б) Перепишем данное уравнение в виде

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1.$$

Поскольку $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} < \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} < \frac{\sqrt{2+\sqrt{4}}}{2} = 1$,

в левой части последнего уравнения стоит сумма двух монотонно убывающих показательных функций, поэтому левая часть — сама монотонно убывающая функция. Но монотонная функция принимает каждое свое значение ровно один раз, поэтому данное уравнение имеет не более одного решения. Осталось подобрать это решение.

14. Ответ: а) 0; б) 0; в) $\log_2 \pi$. Указание.
 а) Поскольку $\lg 1^\circ \cdot \lg 89^\circ = \lg 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1^\circ = 1$, то $\log_2 \lg 1^\circ + \log_2 \lg 89^\circ = 0$. Аналогично преобразуются и остальные пары слагаемых, равно отстоящих от концов рассматриваемой суммы. В результате остается одно лишь среднее слагаемое, $\log_2 \lg 45^\circ$, но оно само равно нулю.
 б) Средний сомножитель равен нулю.
 в) Перейдя к основанию $\cdot 2$, получим ответ.

15. Соединив выбранную внутри или на границе тетраэдра точку с вершинами тетраэдра, разобьем его на пирамиды, основаниями которых служат грани тетраэдра, а вершиной — выбранная точка. Записав, что сумма объемов полученных пирамид равна объему тетраэдра, получим нужное равенство.

Теплоемкость идеального газа

- $T = T_1 + \frac{QvR}{C_V(C_V + R)} = T_1 + \frac{4Qv}{15R} \approx 350 \text{ K}$.
- $A' = \nu C_V T_1 (mn - 1)$.
- $C = C_V + 3R/2 = 3R$.

Ленинградский государственный университет имени Л. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. а) да; б) нет. Указание. Докажите, что шар радиуса R можно поместить в тетраэдр объема V и площади поверхности тогда и только тогда $V > \frac{1}{3} RS$.

2. $\{\pi k; \frac{\pi}{4} (2l + 1)\}$, $(k, l \in \mathbb{Z})$. Указание. После преобразований получаем уравнение — следствие $\sin 4x (1 - \cos 3x \cdot \cos 7x) = 0$, откуда либо $\sin 4x = 0$, либо $\cos 3x \cdot \cos 7x = 1$. Из последнего уравнения следует, что либо

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos 7x = 1, \end{cases}$$

либо

$$\begin{cases} \cos 3x = -1, \\ \cos 7x = -1. \end{cases}$$

При окончательном отборе корней воспользуйтесь условиями $\cos 3x \neq 0$, $\cos 7x \neq 0$.

3. $S = \frac{a^2}{3} (1 - \cos \alpha) \sin \alpha$ (рис. 4, а) или

$S = \frac{a^2}{3} (2 + \cos \alpha) \sin \alpha$ (рис. 4, б) при $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}; \right.$

$\frac{2\pi}{3} \left[; S = \frac{a^2}{9} (3 + \cos \alpha) \sin \alpha$ (рис. 4, в).

или $S = \frac{2a^2}{9} (3 + 2 \cos \alpha) \sin \alpha$ (рис. 4, г) при $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \left[.$

4. $\{(8, \sqrt[3]{5}-1); (2; 4)\}$. Указание. После замены $a^{14} = \frac{3}{4} (\log_8 x + \log_3(y+1))$, $b^{20} = 3 \log_8 x \cdot \log_3(y+1)$ система преобразуется к виду

$$\begin{cases} 8a^7 - 7a^2 = 1, \\ 11b^5 - 5b^4 = 6. \end{cases}$$

Единственным решением этой системы является $a=b=1$.

Для доказательства этого воспользуйтесь тем, что при $a > 1$ и $b > 1$ левые части уравнений больше 1, а при $a < 1$ и $b < 1$ меньше 1.

5. $\alpha \in \left] \frac{8}{7} \pi; \frac{16}{9} (\pi - 1) \left[.$ Указание. При $a=0$ второе неравенство решений не имеет при $a < 0$ первое неравенство приводится к виду

$y^2 - |a+1|y + \frac{9}{16} |a| \left| \frac{7}{16} a + 1 \right| - \frac{1}{8} a > 0$, где $y = ax$; множество решений этого неравенства содержит все достаточно большие по модулю y , среди которых найдутся такие, для которых $\cos y = \cos ax = 0$, то есть не удовлетворяющие второму неравенству.

При $a > 0$ первое неравенство приводится к виду

$$y^2 - (1+a)y + \frac{7a(9a+16)}{256} < 0,$$

где $y = ax$. Решения этого неравенства образуют отрезок $l = \left[\frac{7}{16} a; 1 + \frac{9}{16} a \right]$ длины $1 + \frac{9}{16} a - \frac{7}{16} a = 1 + \frac{a}{8}$. Второе неравенство после замены $y = ax$ приводится к виду $1 - \operatorname{tg}^2 y < -\frac{1}{\cos y}$;

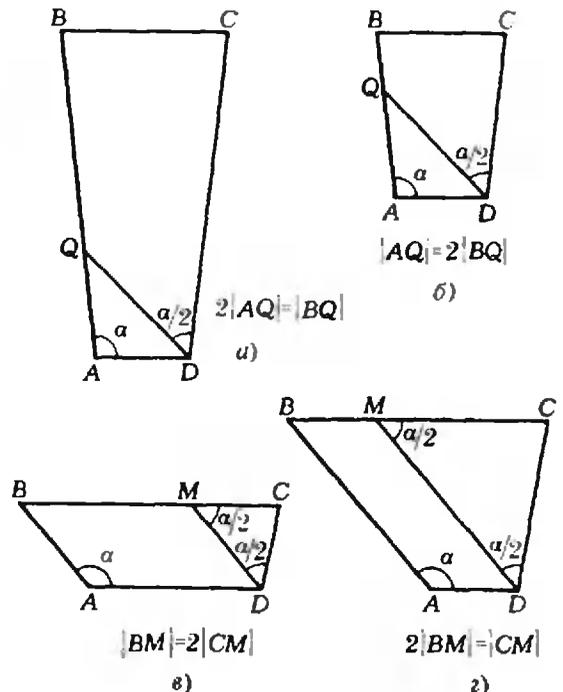


Рис. 4.

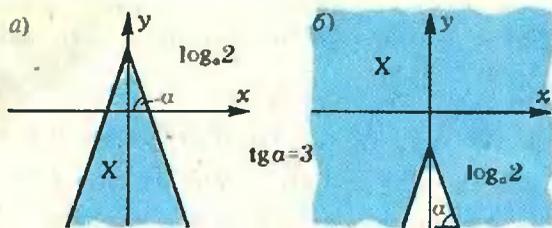


Рис. 5.

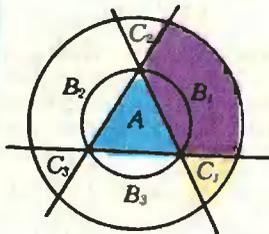


Рис. 6.

решения этого неравенства образуют объединение интервалов $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < y < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < y < \pi + 2\pi k$, $\pi + 2\pi k < y < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k < y < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$ первый и последний из перечисленных интервалов имеют длину $\frac{\pi}{6}$ и поэтому отрезок l ни в одном из них содержаться не может. Значит l может содержаться лишь в одном из интервалов длины $\frac{\pi}{2}$. Отсюда $l + \frac{a}{8} < \frac{\pi}{2}$. Дальнейшее ясно.

Вариант 2

1. $v \left(7 \cdot \frac{223}{209} - \sqrt{\left(7 \cdot \frac{223}{209} \right)^2 - \frac{14}{209}} \right)$

2. Указание. Легко подсчитать, что $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = 1$, то есть $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где k — целое число. Так как $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ получаем $\frac{5\pi}{4} < \alpha + 2\beta < \frac{\pi}{2} + 2\pi$. Поэтому $k = 2$ и $\alpha + 2\beta = \frac{9\pi}{4}$.

3. При $a = 1$ — вся плоскость; при $a > 1$ см. рисунок 5, а при $0 < a < 1$ — рисунок 5, б.

4. $\left\{ \pm \arccos \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{7}} \right) + 2\pi k; \right.$

$\left. \pm \arccos \left(\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{111}{7}} \right) + 2\pi l \right\} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$

Указание. Заменой $z = \cos y$ уравнение приводится к виду $\frac{6}{7|z|} + 2(1+z) = 5$.

5. $V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} H - (a - 2h \sqrt{3})^2 (H - h) \frac{\sqrt{3}}{4}$ — это разность объемов двух правильных треугольных пирамид: с основанием a и высотой H и с основанием $a - 2h \sqrt{3}$ и высотой $H - h$.

Вариант 3

1. $1 + T + \sqrt{T^2 + iT}; T + \sqrt{T^2 + iT}$.

2. Уравнение корней не имеет. Указание.

Выполнив замену $z = (5^{-x} + 4 \cdot 5^x)^{-1}$, получим $4z^2 - z + \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{23}}{5} - \frac{1}{100} = 0$. Свободный член этого уравнения отрицателен, а сумма корней равна $\frac{1}{4}$, поэтому положительный корень z_2 полученного уравнения больше $\frac{1}{4}$. Однако $0 < z < \frac{1}{4}$.

3. Круг разбивается на 7 частей (см. рис. 6).

$S_A = \frac{3\sqrt{3}}{4}; S_{C_1} = S_{C_2} = S_{C_3} = \frac{\sqrt{3}}{4} + 4 \arccos \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{4}{3} \pi,$

$S_{B_1} = S_{B_2} = S_{B_3} = \frac{8}{3} \pi - 4 \arccos \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

4. $x = \frac{\pi}{4} (2k + 1), k \in \mathbb{Z}$. Указание. Исходное неравенство равносильно неравенству $\left(\frac{1}{32 \sin^8 x} - \sin^2 x \right)^2 + \left(\frac{1}{4 \sin^3 x} - 2 \sin^3 x \right)^2 < 0.$

5. $\left\{ (\pm \sqrt{10}; -10); \left(\pm \sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{5}{2} \right) \right\}.$

Физика
Письменный экзамен
Вариант 1
1. Разберем последовательно все возможные случаи.

а) Пуля пробивает шар насквозь. По закону сохранения импульса имеем $mv = -mv/2 + MV$, причем $V < v/2$ (пробив шар, пуля движется быстрее шара). Отсюда найдем

$V = \frac{m v}{M} \cdot \frac{m}{M} < 1.$

Отношение β в рассматриваемом случае равно $\beta = \frac{mv^2/2 - m(v/2)^2/2 - MV^2/2}{mv^2/2} = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{m}{M} \right).$

Учитывая предыдущее условие для масс, получим область изменения β : $\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{4}.$

б) Пуля застревает в шаре. В этом случае скорости шара и пули после удара одинаковы, поэтому $mv = (m + M) \frac{v}{2}$ и $\frac{m}{M} = 1.$

Тогда $\beta = \frac{mv^2/2 - (m + M)(v/2)^2/2}{mv^2/2} = \frac{1}{2}.$

в) Пуля отскакивает от шара назад. Теперь закон сохранения импульса записывается в виде $mv = -mv/2 + MV$, откуда $V = \frac{m}{M} \frac{3}{2} v.$

и $\beta = \frac{mv^2/2 - m(v/2)^2/2 - MV^2/2}{mv^2/2} = \frac{3}{4} \left(1 - 3 \frac{m}{M} \right).$

Из последнего выражения находим $m/M < 1/3$, и, следовательно,

$$0 < \beta < \frac{3}{4}.$$

Теоретически возможен еще один случай, когда после удара пуля движется вслед за шаром с меньшей, чем он, скоростью. Легко убедиться, что для этого массы пули должна быть больше массы шара. По условию задачи такая ситуация на опыте не реализуется.

Полученные результаты позволяют сформулировать ответ следующим образом:

Если $\beta < \frac{1}{2}$, то пуля отскакивает от шара назад.

Если $\beta = \frac{1}{2}$, то при $\frac{m}{M} = 1$ пуля застревает в шаре,

а при $\frac{m}{M} < \frac{1}{3}$ — отскакивает назад. Если

$\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{4}$, то при $\frac{1}{3} < \frac{m}{M} < 1$ пуля пробивает шар насквозь, а при $\frac{m}{M} < \frac{1}{3}$ пуля либо пробивает шар, либо отскакивает от него назад (для окончательного ответа необходимо знать конкретные значения отношения m/M и коэффициента β).

2. Поскольку во всех частях сосуда содержится одинаковое число молей идеального газа, справедливы равенства

$$p_A V_A = p_B V_B = p_C V_C = \gamma RT.$$

$$p'_A V'_A = p'_B V'_B = p'_C V'_C = \gamma RT'.$$

Учитывая, что действующие на каждый неподвижный поршень силы уравновешиваются, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} p_B - p_A &= p'_B - p'_A, \\ p_C - p_B &= p'_C - p'_B. \end{aligned}$$

С помощью этих равенств и данных условия задачи находим

$$x = 5/2.$$

Для ответа на второй вопрос задачи учтем, что сумма объемов газов одинакова при любой температуре:

$$V_A + V_B + V_C = V'_A + V'_B + V'_C.$$

Отсюда, используя данные условия, получаем

$$\frac{T'}{T} = \frac{24}{11}.$$

3. а) Замкнем оба ключа. В установившемся режиме напряжения на конденсаторах равны напряжениям на участках цепи, параллельно которым эти конденсаторы подключены, поэтому, установив на реостате $R = 0$, получим $U_1 = 0$ и $U_2 = U$. Теперь можно разомкнуть ключ K_2 , а затем и K_1 . Ток в цепи прекратится, но напряжения на конденсаторах останутся прежними (хотя формально конденсаторы соединены последовательно, суммарный заряд правой обкладки первого конденсатора и левой обкладки второго не равен нулю).

б) Замкнем ключ K_2 . При этом напряжение на втором конденсаторе $U_2 = 0$ (так как его обкладки замкнуты через лампочку, а тока в цепи нет), а напряжение на первом конденсаторе $U_1 = U$. Теперь разомкнем ключ K_2 — напряжения на конденсаторах при этом не изменятся. Замкнув ключ K_1 , мы добьемся того, что через лампочку пойдет ток, но при этом $U_1 = U$ и $U_2 = 0$.

в) Этот случай аналогичен первому. Установив на реостате $R = R_0$ при обоих замкнутых ключах получим $U_1 = U_2 = U/2$.

4. Решение этой задачи основано на последовательном применении закона преломления света

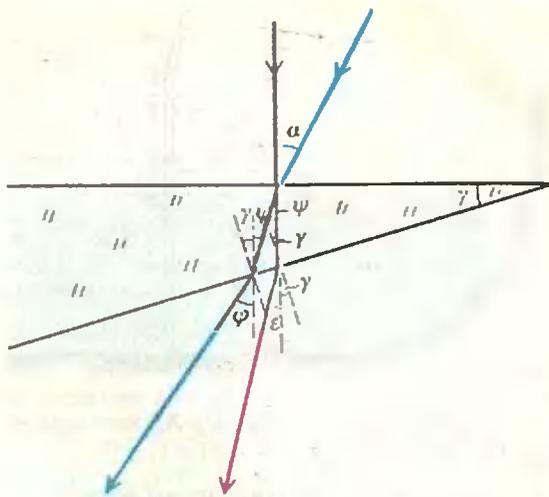


Рис. 7.

на плоской границе раздела двух сред и ясно из рисунка 7 (малость фигурирующих углов позволяет заменить синусы углов самими углами, выражаемыми в радиальной мере):

$$\frac{\sin(\varepsilon + \gamma)}{\sin \gamma} = n, \quad \frac{\varepsilon + \gamma}{\gamma} \approx n, \quad \varepsilon \approx \gamma(n - 1),$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \psi} = n, \quad \frac{\alpha}{\psi} \approx n, \quad \psi \approx \frac{\alpha}{n},$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\varphi + \gamma)}{\sin(\psi + \gamma)} = n, \quad \frac{\varphi + \gamma}{\psi + \gamma} \approx n, \quad \varphi \approx n\psi + (n - 1)\gamma = \\ = \alpha + \gamma(n - 1), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\varphi - \varepsilon \approx \alpha,$$

то есть второй преломленный луч повернут относительно первого преломленного луча на угол α .

Вариант 2

1. После вылета из шара скорость первой пули уменьшится в 7 раз. Если $m_1/m_2 = 4/11$, то в первом шаре выделится в 3 раза больше тепла, чем во втором. Во втором шаре не может выделиться больше тепла, чем в первом, ни при каких условиях.

2. Напряжение на конденсаторе емкостью C_1 не изменится при переключении ключа, если $\mathcal{E}_2 = 0$. Укажите это. Рассчитайте напряжения на первом конденсаторе при обоих положениях ключа и сравните их между собой. Аналогичный расчет можно найти в книге Е. И. Бутнкова, А. А. Быкова и А. С. Кондратьева «Физика в примерах и задачах» (М., 1983, с. 278).

Задачу, однако, можно решить и не проводя детального расчета. Действительно, предположим, что напряжение U_1 на первом конденсаторе остается постоянным при переключении ключа из А в В. В таком случае при обоих положениях ключа справедливо равенство $U_1 + U_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. Но это означает, что при переключении не меняются и напряжение U_2 на втором конденсаторе, и заряды на обоих конденсаторах. Тогда не должно меняться и заряд на третьем конденсаторе, ибо алгебраическая сумма зарядов на правой обкладке первого конденсатора, на правой обкладке второго и на нижней обкладке третьего равна нулю. Следовательно, не должно измениться и напряжение U_3 на третьем конденсаторе. Но после переключения $U_3 = U_2$, так как теперь эти конденсаторы соединены параллельно. Зна-

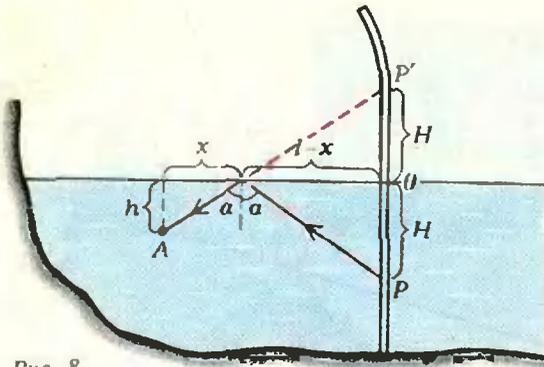


Рис. 8.

чит, и до переключения $U_2 = U_3$. А это возможно, только если $\mathcal{E}_2 = 0$.

3. $n = 4$.

4. Прежде всего заметим, что наблюдатель — близорукий (человек с нормальным зрением плохо видит под водой без маски). Он увидит погруженную часть рейки, а над ней — ее отражение от поверхности воды (за счет явления полного отражения). Предельная видима в отраженном свете точка P рейки определяется из условий (рис. 8).

$$\sin \alpha = 1/n, \quad H = (l-x) \operatorname{ctg} \alpha, \quad h = x \operatorname{ctg} \alpha,$$

откуда находим

$$H = l \sqrt{n^2 - 1} - h$$

(физический смысл имеют лишь положительные значения H). Точно на высоте точки P' (по углу) будет видно начало (точка O) выступающей из воды части рейки. Вся выступающая часть будет казаться сильно сжатой снизу и изогнутой.

Задачи устного экзамена

1. Если трение не учитывать, что $h_1 = -(v_0^2 \sin^2 \alpha) / (2g)$ и $h_2 = v_0^2 / (2g)$.
2. $\alpha = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{m}{M} \right)$; из условия пробивания пулей шара следует, что $m/M < 1$, поэтому $1/2 < \alpha < 3/4$.
3. $\alpha = \operatorname{arctg} (1/3)$.
4. См. рис. 9.
5. $\rho = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2) / (V_1 + V_2)$.
6. См. рис. 10, где $\mathcal{E} = \sqrt{PR} / 2 (\sqrt{2} + 1)$ и $r = R / \sqrt{2}$.
7. См. рис. 11.
8. $U = kW / m = 10,8$ В.

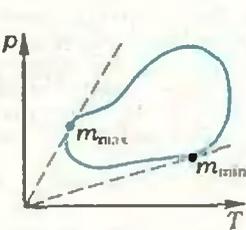


Рис. 9.

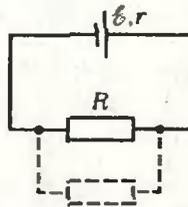


Рис. 10.

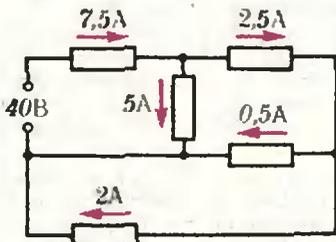


Рис. 11.

9. $\delta = 2a$.

10. $h = H/n$, где n — показатель преломления воды.

Ленинградский политехнический институт имени М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).
2. $b_1 = 3$; $q = 4$ и $b_1 = 48$; $q = 1/4$.
3. $D(f) =]1; +\infty[$; функция убывает на промежутке $]1; +\infty[$.

4. $\vec{KP} = -\frac{13}{22} \vec{e}_1 + \frac{36}{11} \vec{e}_2$. Указание: пусть E середина стороны BC, тогда $\widehat{PBE} = \widehat{EPB} = \widehat{ABP}$.

Вариант 2

1. $\{3; 3 \log_6 2\}$.
2. $\{-4\}$.
3. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.
4. $\alpha \in]-1; -\frac{2}{3}[$.

Физика

1. $v_{ср} = v/2 = 5$ м/с.
2. Ракета достигает наибольшей высоты, если вторая порция топлива сгорает непосредственно вслед за первой.
3. $h = 2\rho_n / (\rho g) \approx 20$ м (здесь $\rho_n = 10^5$ Па — нормальное атмосферное давление, $\rho = 10^3$ кг/м³ — плотность воды).
4. $N = N_A \rho V / (RT) \approx 1,45 \cdot 10^{24}$ (здесь $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ моль⁻¹ — постоянная Авогадро).

5. 1) $v = \sqrt{2 \frac{kq^2}{m} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$; 2) $A = \frac{kq^2}{r_0}$.

(Здесь k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц.)

6. $P' = 9P/16 = 9$ Вт.

7. $l = \frac{Blv}{R + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)}$.

8. Считая плотность ядерного вещества постоянной, найдем, что интересующее нас ядро — это ядро бериллия ${}^9_4\text{Be}$. Его энергия связи $E_{св}$ равна удельной энергии связи $E_{уд}$, которая примерно одинакова для всех ядер, умноженной на число нуклонов N :

$$E_{св} = E_{уд} N \approx 8 \text{ МэВ} \cdot 8 \approx 64 \text{ МэВ}.$$

9. Температура связана с кинетической энергией протона соотношением $E_k = 3/2 kT$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Согласно закону сохранения энергии,

$$2E_k = E_p, \text{ или } 2 \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

Отсюда найдем

$$T = \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 k r_0} \approx 1,1 \cdot 10^9 \text{ К}.$$

Ленинградский государственный педагогический институт имени А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 1. 2. $\{2; 4\}$.
4. Пусть M — произвольная точка описанной окружности (см. рис. 12). Отложите на [MA]

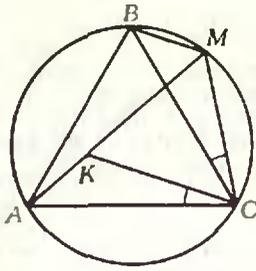


Рис. 12.

отрезок MK длины $|MC|$ после чего докажете, что $\triangle AKC \cong \triangle BMC$.

$$5. \frac{2a^2 \sin \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$$

Вариант 2.

1. 1. 2. {1; 3}. 3. $]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$.

$$5. \frac{b^3}{24} \operatorname{tg} \alpha.$$

Физика

Физический факультет

- $x = g / (4\pi^2 v^2) \approx 0,06$ м.
- См. рис. 13, а и б.
- См. рис. 14.

Математический факультет

- $v' = v / \sqrt{2} \approx 10$ м/с.
- $T = \frac{\Delta T}{(1-\alpha)(1+\beta)-1} = 200$ К (здесь $\Delta T = 16$ К,

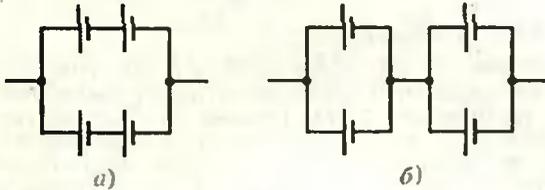


Рис. 13.

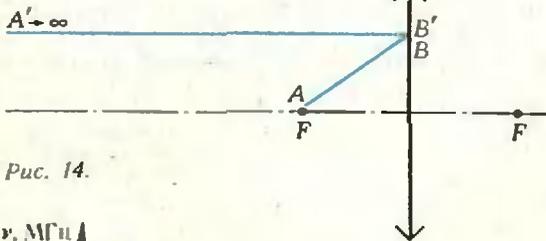


Рис. 14.

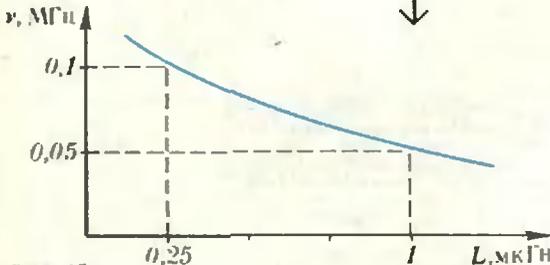


Рис. 15.

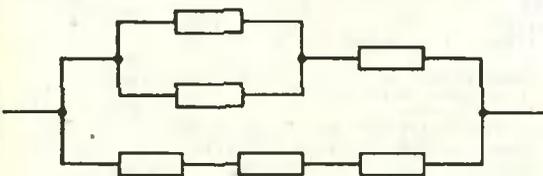


Рис. 16.

$\alpha = 0,1$ и $\beta = 0,2$).

3. См. рис. 15.

$$4. k = \frac{F^2}{(d-F)(d+l-F)} = 2.$$

Химический факультет и факультет естествознания

- $v_0 = (4l_1 - l_2) / (2l) = 10$ м/с (здесь $l = 5$ с).
- $N = N_A \rho V / (RT) \approx 3,6 \cdot 10^{25}$ (здесь $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ моль⁻¹ — постоянная Авогадро, $R = 8,31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная).
- $\eta = \frac{c \rho V (t_k - t)}{P \tau} 100\% \approx 47\%$ (здесь $\rho = 10^3$ кг/м³ — плотность воды, $t_k = 100$ °С — температура кипения воды).
- $W = \frac{\rho V M F n U}{R T A \eta / 100\%} \approx 0,13$ МДж (здесь $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса водорода, $F = 96\,500$ Кл/моль — постоянная Фарадея, $n = 1$ — валентность атома водорода, $R = 8,31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная и $A = 10^{-3}$ кг/моль — атомная масса водорода).

Индустриально-педагогический и художественно-графический факультеты

- Давление воды на стенки сосуда не изменится.
- См. рис. 16.
- Один конец нити нужно прикрепить к валу электродвигателя, а второй — к перемещающемуся телу; вольтметр следует подключить к электродвигателю и проградуировать его в единицах скорости.

«Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 3)

- Да, верно, так как $(n-1)n = n^2 - n = -2 + 2 = -(n+1)(n-2) + 2$.
- Колесики, приводящие в действие динамомашину, вращаются из-за трения об обод. Колесики будут вращаться с одинаковыми скоростями (так как велосипеды едут с одинаковыми скоростями). Значит, фонарики будут светить одинаково.
- Нет: трехзначное число не меньше, чем произведение первой цифры на 100, а произведение цифр не больше, чем произведение этой цифры на 81.
- Эти площади равны, так как площадь заштрихованного сектора в четыре раза больше площади «заточканного» сектора, и четыре розовых сектора конгруэнтны (рис. 17).
- Пусть вторая и третья цифры числа будут x и y , тогда само число можно записать как $900 + 10x + y$. После переноса цифры 9 в конец числа, получаем число $100x + 10y + 9$, которое на 216 меньше предыдущего, то есть $900 + 10x + y = 100x + 10y + 9 + 216$. Отсюда $90x + 9y = 675$. Разделив обе части на 9, получим $10x + y = 75$, следовательно, первоначальное число есть 975.

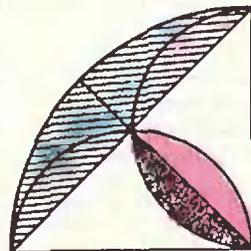


Рис. 17.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 1)

Задание 1 (Решевский — Глигорич, Нью-Йорк, 1952 г.). Ферзь c2 и слон h2 направили свои рентгеновские лучи на ферзя e7. Препяды для них не существуют. 1. Kb5! cb 2. Ф:c7+ С:c7 3. Л:c7 Кр:c7 4. К:e6+ + Kpd7 5. К:d8 Л:d8

6. С:b5+. Черные сдались.

Задание 2 (Хуг — Горт, Скопле, 1972 г.). Ферзь g6 взял на мушку неприятельского короля. 1...С:h4! 2. gh Jf3!! 3. Ke3 (3. ef g1+ 4. Kpf1 Фg2+ 5. Kpe1 Ф:g1+ 6. Фf1 Фg3+ с выигрышем) 3...Jlg3+ 4. Kph1 (4. Kph2 Фh5) 4...Jf2! Белые сдались.

Главный редактор — академик И. К. Кикони

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соколов, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,
Т. С. Петров, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:

М. Б. Дубах, В. С. Коваль, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров,
А. А. Орехов, А. Е. Остаев, И. А. Смирнов, И. Е. Смирнова,
Е. К. Тенчурин

Фото представили:

А. Н. Виленкин, А. С. Кондратьев
В номере использованы материалы фотохроники ТАСС

Заледнюющая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Малярова

Корректор Е. В. Сидоркина

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.2.84.
Подписано к печати 23.2.84.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16 Усл. кр. от 24,85
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,79. Т-07949
Цена 40 коп. Заказ 380. Тираж 178 944 экз.

Шахматная страничка



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЧЕТВЕРТЫЙ ЧЕМПИОНАТ МИРА СРЕДИ ЭВМ

В «Кванте» уже рассказывалось о трех чемпионатах мира среди компьютеров. Четвертый состоялся осенью прошлого года в Нью-Йорке. Как и все предыдущие, он проводился по швейцарской системе, чемпионский титул в пяти турах разыграли 22 программы. Две первые чемпионки мира — «Кансса» и «Чесс» — на этот раз в соревновании не участвовали.

Победительницей стала программа «Крэйблиц» (США). Новая чемпионка, игравшая на самой мощной машине с скоростью более 100 миллионов операций в секунду, набрала 4,5 очка. На пол-очка отстала «Бебе» (США) и «Эвнит» (Канада). Перед заключительным туром «Крэйблиц» опережала предыдущую чемпионку мира «Белл» на пол-очка, и все решалось в партии между ними. Эта партия оказалась и самой интересной в турнире.

«Белл» — «Крэйблиц»
Сицилианская защита

1.e4 c5 2.c3 d5 3.ed Ф:d5 4. Kf3 e6 5.d4 Kf6 6.Cd3 Kc6 7.0—0 С:7 8.С:3 0—0 9.dc. После 9...С:c5 10.С:h7+, 11.Ф:d5 и 12.С:c5 белые просто остаются с лишней пешкой. Любопытно, что на основании этого варианта «Энциклопедия шахматных дебютов» осуждает рокировку черных. Однако «Крэйблиц» находит сильный промежуточный ход ладьей. 9...Jld8 10. Kd4 С:c5 11.c4 Фd6 12. K:c6 bc 13. С:c5 Ф:d3. Благодаря приращенной новнке черные получили хорошую игру, и белым пора беспокоиться о поисках равенства. Годилось 14.Ф:d3 J:d3 15.Кс3 Са6 16.Лад1. С:c4 17.Л:d3 С:d3 18.Лd1 Сс4 19.С:a7 с близкой ничьей, но, с другой стороны, в сложившейся спортивной ситуации «Белл» устранивала только победа, и она должна была избежать упрощений. Впрочем, подобные психологические нюансы вряд ли учи-

тывались машиной. 14.Фa4 Ke4 15.Сb6. Остроумный способ решить проблему развития ферзевого фланга. Белый слон, правда, оказывается на отшибе. 15...Jld7 16.Са5. Ни в этот момент, ни в какой другой взятие на c6 невозможно из-за выпада слона на b7. 16...Сb7. Активнее 16...Лb8, и заботы белых по координации своих фигур еще не кончаются. 17.Кс3 Кс5 18.Фb4 Фd4.

Заслуживало внимания 17.Кd2! После 17...К:d2 18.С:d2 ничья не за горами (18...Ф:d2? 19.Лад1), а в случае 17...Кс5 18.Фb4 Фd4 19.Кf3! об уравнении уже должны думать черные. На f3 конь стоит куда лучше, чем на с3. 19.Лад1 Кd3 20.Фa4 Фg4. Снова черные допускают неточность. Гораздо сильнее 20...c5. Над белым королем стучаются тучи. 21.c5! Фf5. Неопасно 21...Кf4 из-за 22.g3. 22.b4! Наконец ферзевый фланг белых стабилизирован, а слон a5, расположенный несколько неуклюже, принимает косвенное участие в борьбе за линию «d». Но не звинули ли белые вилку?

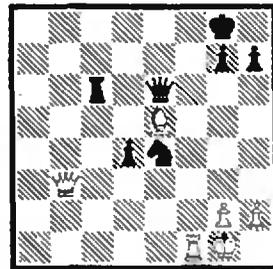
22...Кb2 23.Л:d7! «Белл» смело жертвует ферзя, очевидно, это было предусмотрено машиной заранее. 23...К:a4 24.К:a4 Фс2 25.Л:b7 Ф:a4 26.Ла1? Вот тот самый момент, когда шахматная корона переходит от «Белл» к «Крэйблиц». Тактическую схватку «Белл» провела вполне достойно, но в позиционной игре она чувствует себя совершенно растерянной. Пожалуй, такой ход ладьей в состоянии сделать только начинающий шахматист, оберегающий каждую свою пешку. Задача белых — побыстрее соединить ладьи, и пешка a2 тут ни при чем. Нормальное продолжение 26.h3 и если 26...Ф:a2, то 27.Лd1. В крайнем случае эта ладья попадет на линию «d» после предварительного Лbd7 и в сложной игре белые могли еще рассчитывать на успех. 26...e5 27.f3? Еще один ход, который любой опытный шахматист отвергнет, не рассматривая ни одного варианта. 27...Фс2 28.Лс7 Фd3. Не только угрожая Фd4+, но и захватывая линию «d», которую белые слишком легко уступили противнику. 29.Лf1 Фd5 30.a3 g5 31.Ле7 f6 32.Лс7 h5. Фигуры белых разобщены и, как ни странно, черные наращивают свой перевес, надвигая пешки. Они-то и решают исход поединка. 33.h3 Kph8 34.Kph2 a6 35.Лe1 Ле8 36.Ле4 f5 37.Ле2 g4 38.hg fg 39.fg hg 40.Лf2

e4 41.Лff7. Ладьи встретились друг с другом, но слишком поздно. 41...Фe5+ 42.g3 e3 43.Лh7+ Kpg8 44.b5. Слон подключается к защите, но ничего изменить не может. 44...cb 45.Сe1 Фb2+ 46.Kpg1 Фa1 47.Kpg2. Надежды белых на вечный шах не оправдываются. 47...Jld8 48.Лhd7. Ускоряет развязку. 48...Лf8. Живой шахматист, наверное, предпочел бы 48...Л:d7 и 49...Ф:e1, но компьютер счел, что с ладьей мат поставить проще. 49.Jld6 Фb2+ 50.Kpg1 Фb1 51.Kph2 Фс2+ 52.Kpg1 Фf5. Убедившись, что мат неизбежен, «Белл» сдала партию, поздравив соперницу с завоеванием звания чемпионки мира.

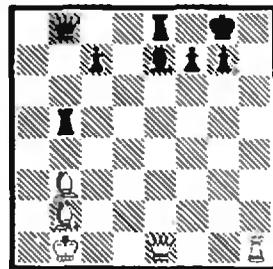
Судя по партиям последнего первенства мира, сила электронных шахматистов осталась на прежнем уровне. Использование современных ЭВМ позволило увеличить глубину перебора на несколько полуходов, но на классе игры это существенным образом не сказалось. Для качественного скачка вперед, видимо, требуются принципиально новые идеи, отличные от полного перебора вариантов, который лежит в основе большинства действующих программ.

Конкурсные задания

Сегодняшние задания примечательны тем, что с ними справилась программа «Белл».



7. Белые начинают и выигрывают.



8. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 июня 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ

23 года назад, 12 апреля 1961 года, первый космонавт Юрий Гагарин совершил космический полет на корабле «Восток». Эта знаменательная дата отмечается в нашей стране как всенародный праздник «День космонавтики». К этому празднику ежегодно выпускаются специальные почтовые марки, а иногда и почтовые блоки. По ним можно проследить хронологию выдающихся достижений нашей страны в изучении космоса. На этих марках и блоках отражены различные этапы исследования Луны, Венеры и Марса при помощи автоматических межпланетных станций и разнообразных авто-

матических устройств, показаны советские космические корабли и орбитальные станции. Марки рассказывают о метеорологических спутниках и спутниках связи, о первом выходе человека в открытый космос, о совместном советско-американском космическом полете «Союз—Аполлон», о международной космической программе «Интеркосмос», успешно осуществляемой при активном участии Советского Союза.

Мы воспроизводим здесь почтовый блок и несколько марок, посвященных Дню космонавтики.

В. Рудов

